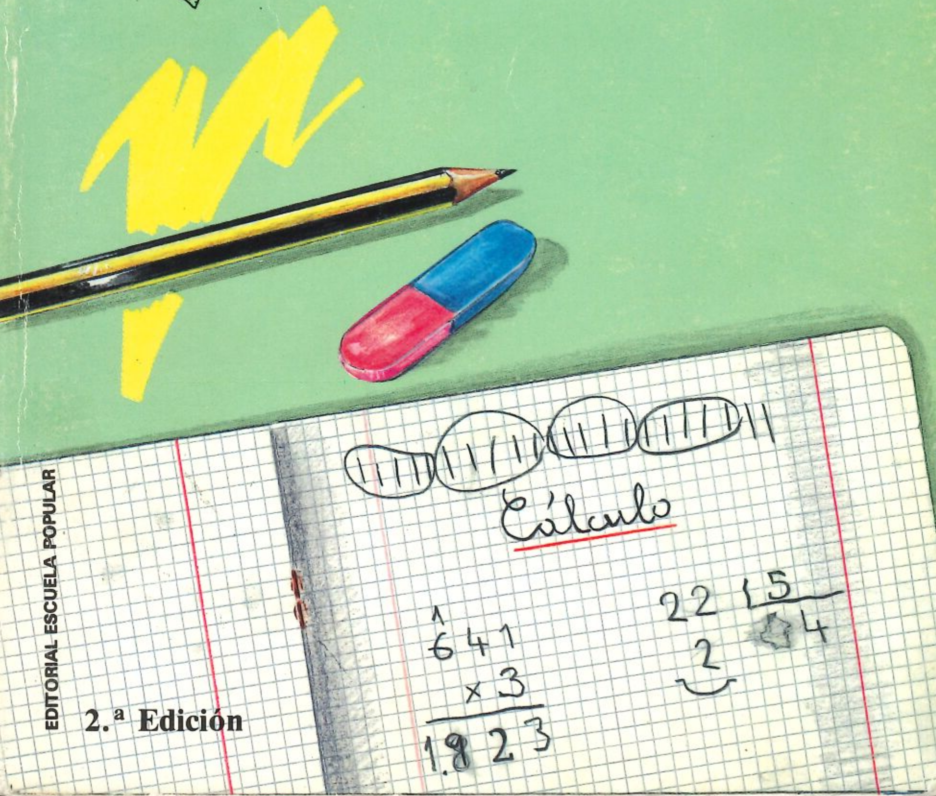
Manolo Alcalá

Otras matemáticas otra escuela



2.ª Edición

EDITORIAL ESCUELA POPULAR

EDITORIAL ESCUELA POPULAR

otras matemáticas otra escuela

Manolo Alcalá

Depósito Legal: GR. 113-1.986
I.S.B.N.: A-84-398-6063-3
Portada: Paco Botella.
Editorial: E. Popular.
Imprime: Imp. Ave-María.

PROLOGO

Acabas de tomar en tus manos una herramienta de trabajo. Un libro o unos apuntes que recogen el día a día de la práctica escolar en un área que suele parecernos árida, fea, excesivamente fría y por eso mismo arrinconable, que se toca de pasada, a la fuerza, porque no hay más remedio; porque las cuentas son útiles, o porque, si el maestro es muy aficionado a los números, puede resultar grato transmitir el gusto de resolver problemas o de llegar al resultado correcto de cualquier operación. Pero ya han pasado los tiempos de estas actitudes y el que más como el que menos sabe que ya no es serio autoengañarse haciéndonos creer que eso, aquello, lo anterior caricaturizado, es la matemática.

Cuánta angustia somos capaces de sentir cuando en un principio de curso no sabemos cómo cogerle los cuernos al toro de los algoritmos y cambios de base. He aquí una herramienta útil; no será una panacea, pero sí una herramienta de gran ayuda. No se quiera ver en estas páginas dogmas y cuerpos de doctrina; no, nada de sectas y pontificaciones; sólo se puede leer el método y lo didáctico de unas experiencias que la solera del tiempo ha podido testificar su validez. No es un libro para confirmar grandes teorías sino para ayudar en el camino al compañero; es un guiño amable de trabajador a trabajador, de maestro a maestro. Es el compendio de muchas horas de trabajo, consultas y reflexiones; es un camino fácil y natural (de naturalidad y naturaleza) de introducir conceptos y ajustar pensamientos lógicos. Es una forma de leer conscientemente el lenguaje interno de las estructuras *matemáticas, de operar con cifras viendo y tocando los números y las cosas o las cosas y los números; es leer el esfuerzo que supone haber reunido en líneas y hojas la necesidad de cambiar la didáctica de la imposición por la didáctica de lo científico que siempre comporta un sentimiento de lo lúdico,*

«pues es belleza, lo encierra
«toda verdad y toda ciencia»

Es, sobre todo, ayudar a poner las bases de lo que serán después personas equilibradas con cabezas críticas. Se trata de ajustar el fundamento de posteriores construcciones, cimientos claros para edificios humanos...

¿Quién ha dicho que la matemática es fría, que no es humana?, ¿Acaso la poesía no es el rítmo y el rítmo la medida del tiempo? ¿No es el ritmo la vida misma, el movimiento, el tric-trac inmortal, que juega y armoniza con el universo todo, con el cosmos,...?

No podía ser de otra forma. Sólo en nuestro Sur andan a la par, imbricados, el espíritu de geometría y el espíritu de poesía...

Paco Gallurt
Málaga, verano del 85

PROLOGO A LA SEGUNDA EDICION

Cuando un trabajo modesto, como el presente, sufre la prueba de agotar su primera edición provoca en el autor un ambiguo sentimiento de responsabilidad y ambición. Responsabilidad por la incidencia e influencia que ejercen en otros maestros las opiniones y experiencias que el texto encierra. Ambición por cuanto es tentadora la ilusión de hacer un libro definitivo, «el libro», de una determinada didáctica de la matemática. Responsabilidad y ambición que conducen a querer hacer un verdadero tratado.

Pero ello es imposible. De un lado, el autor, maestro, se ve a sí mismo como un trabajador de la escuela, incapaz de ma-

yores empresas. De otro, razones económicas (la editorial es pequeña y no está sobrada de fondos) impiden confeccionar ese hermoso y perfecto libro que diera cumplida satisfacción.

Consecuentemente, la opción tomada para esta segunda edición ha sido la de reimprimir el texto en la versión original con dos modificaciones: una, corregir algunas erratas; otra, añadirle un anexo, - «INVESTIGAR EN DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS».

***A) Corrección de algunas erratas.** Entre los muchos defectos de la primera edición destacan, visiblemente, los tipográficos. El libro está repleto de erratas: signos de puntuación mal colocados en abundancia, terminaciones de palabras, frases entrecortadas, etc., etc.,*

Corregirlas todas hubiese implicado hacer una impresión nueva, lo que es económicamente costoso. Así pues, se ha optado por rectificar mediante una «fe de erratas» que se adjunta al final del volumen, sólo aquellos párrafos o términos cuya no corrección hace ininteligible el mensaje del libro o que induce a interpretaciones no deseables.

Esperamos que el lector sea comprensivo y soporte los aún innumerables errores que permanecen en el texto.

***B) Anexo.** La razón de publicar este libro fue la de querer extender entre el resto del profesorado una concepción de la escuela y, en concreto, de la enseñanza de la matemática fraguada en la tradición de la pedagogía de la Escuela Moderna. La comunicación de tal concepción de la enseñanza de la matemática precisaba dos requisitos. Uno, la elaboración de un breve, asequible y coherente basamento teórico. Otro, la exposición de algunas experiencias que, a modo testimonial, fuesen ilustrativas de los posicionamientos teóricos y cuya lectura ayudase a los maestros en el duro trabajo de enseñar matemáticas.*

Obviamente, ni las ideas originales ni el enfoque global fueron obra exclusiva del autor sino fruto de la contrastación continuada del trabajo en el seno del colectivo al que pertenece.

Tanto la elaboración teórica como las experiencias que se narran son, -y tienen la expresión típica-, de principios de la década presente. Sin embargo, hoy, cuando el lenguaje de moda es otro y la obsesión por la racionalidad y la eficiencia ha ido en aumento en algunos sectores, parece tener más vigencia, si cabe, la propuesta que este texto contiene. Sobre todo en lo tocante al rol del maestro.

El papel que ha de jugar el maestro en la didáctica que aquí se propone es una preocupación constante a lo largo del libro. En el primer capítulo, II a), se le valora como constructor de su propia didáctica y, al final del mismo, se le sugieren unos pasos para ello. En capítulos siguientes, las experiencias narradas muestran el mismo perfil de profesor. Por último, el capítulo final da unas pinceladas sobre un método de trabajo investigativo del propio maestro.

A pesar de ello y al hilo de algunas discusiones actualmente en boga, nos ha parecido conveniente adjuntar un anexo titulado «INVESTIGAR EN DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS». En él vertimos algunas precisiones sobre la «investigación» y sobre la «investigación en matemáticas»; además, se hace una exposición algo detallada del método de trabajo que hizo posible la realización de las experiencias aquí narradas. Método de trabajo conocido por quienes han participado con nosotros en seminarios y grupos de trabajo y cuyo conocimiento puede ser útil a otros profesores.

Manuel Alcalá
Málaga. Marzo de 1988

II a

Bases Teóricas

Construir una didáctica de la matemática

El mayor problema que afecta a la enseñanza de las matemáticas es el hecho de que la inmensa mayoría de los enseñantes rehusan encarar tal enseñanza con actitud personal creativa, a pesar del reconocer las dificiencias y los malos rendimientos de su labor. Ante las dificultades que encuentran en afrontar la situación optan por asirse al salvador libro de texto o «guía didáctica», haciendo omisión de sus propias y personales posibilidades. Pero, efectivamente, el libro de texto al respecto o la guía es un material que por su naturaleza estandar y homogeneizante pretende ser eficaz en todas las escuelas y adaptarse a todos los grupos de niños resultando con ello que es ineficaz para cualquier grupo concreto.

Hemos de compartir la idea de que la didáctica que cada grupo de niños precisa tiene que ser o recreada en contacto directo y en función de los individuos concretos a los que va destinada. La labor de esa creación corre a cargo del enseñante fundamentalmente. En las páginas siguientes de un modelo de creación didáctico en el que los alumnos son partícipes del mismo. Por su propia naturaleza el modelo de creación que suscribimos sólo es concebible dentro del marco pedagógico de una escuela viva.

Hay dos vías para la elaboración de cualquier didáctica,una teórica, que se apoya en las ciencias anexas a la Pedagogía; otra de procedimiento inverso. Empecemos por la primera de ellas.

Para conseguir nuestro objetivo precisaremos tomar en cuenta los diferentes factores que puedan confluir en ello, que pueden agruparse del siguiente modo:

A) CONOCIMIENTO DE LOS ALUMNOS

B) ESTUDIO DE LOS DIFERENTES METODOS, TECNICAS Y MATERIALES UTILIZADOS.

C) ELECCION DE UN MARCO PEDAGOGICO

D) ESTUDIO PORMENORIZADO DE LOS ALUMNOS,

E) POSIBILIDADES DEL AULA Y DEL MEDIO EN QUE NOS ENCONTRAMOS.

A) CONOCIMIENTO DE LOS ALUMNOS

Tendremos que recurrir a la **Psicología** tanto Diferencial como Evolutiva para tener una idea, siquiera global, de cómo es el niño, el individuo, en esa etapa de su vida; sus intereses, necesidades, conductas más frecuentes. Con seguridad, nos interesará aun más el niño en cuanto sujeto que aprende por lo que habremos de recurrir a la **Psicología** del **Aprendizaje** y a las investigaciones que consideremos convincentes sobre el particular.

Habitualmente el maestro afronta su trabajo con un bagaje de información de psicología infantil que podríamos denominar «de sentido común». Y aun cuando sus estudios de carrera le dotaron de algún conocimiento acerca de las corrientes psicológicas, no parece hacer uso de él pues recurre a sus propias intuiciones sobre cómo son los niños y cómo aprenden. Sin embargo, eso no parece ser suficiente.

Es un hecho evidente que toda didáctica se apoya en una Psicología bien construída. Todos los grandes pedagogos han intentado siempre fundamentar sus posturas en teorías psicológicas tomadas de otros o creadas por ellos mismos. Dewey, Freinet..., así lo hicieron. Hoy podemos decir que cada corriente pedagógica se apoya en un cuerpo de principios psicológicos para justificarse y justificar su didáctica.

Hay quien afirma que las didácticas del movimiento Escuela Nueva han ido perdiendo vigencia debido a su insuficiente fundamentación psicológica.

Por el contrario, actualmente la Psicología pone al servicio de la educación un conjunto de investigaciones y teorías más avanzado y firme que lo disponible hace setenta años.

Estamos de acuerdo en que todas las didácticas que toman a la Psicología como su soporte fundamental se construyen:

—En función de la naturaleza sicológica del sujeto, es decir, en función de cómo el pedagogo conciba los mecanismos conductuales y de aprendizaje de los alumnos.

—O bien en función de la naturaleza sicológica de los conocimientos a adquirir. Es el caso de algunas didácticas que intentan apoyarse en los trabajos de Piaget.

Evidentemente en ambos casos se produce un reduccionismo. Además la Psicología no es una. Dentro del campo de esta ciencia hay diferentes posturas, diversas corrientes o escuelas, determinadas tanto por los resultados de sus investigaciones como por la concepción de sus defensores sobre la naturaleza última de la ciencia y de lo social.

Los maestros, a mi entender, debemos optar, aun a sabiendas de que ninguna escuela psicológica merece ser descalificada, pues la verdad es amplia y no puede ser agotada por ninguna perspectiva o interpretación; pero sí estará condicionada nuestra elección por la concepción de escuela que tengamos y por los objetivos que nos propongamos alcanzar.

Reduciendo nuestro discurso al ámbito específico de la didáctica de la matemática constatamos la existencia actual de bastantes aportaciones que pueden ser clasificables, creo, en dos grandes grupos:

—Uno, sustentado en posiciones conductistas, que fue del agrado oficial desde los años 70 y que se encuentra en retroceso.

—Otro apoyado en perspectivas cognitivas ya americanas, ya europeas, y que está tomando auge.

Tanto lo proveniente del campo de la pedagogía Freinet como de la escuela soviética no es encajable en ninguna de los dos grupos anteriores.

B) METODOS. TECNICAS. MATERIALES.

El estudio de diferentes métodos, técnicas y materiales se nos hace necesario como paso previo a la construcción de una didáctica por el hecho de que nos proporciona gran información sobre el trabajo que podemos hacer, cómo llevarlo a efecto y con qué materiales. No parece ser posible una enseñanza adecuada si el maestro no posee un conocimiento previo de técnicas que habrá de emplear, de utensilios convenientes ya contrastados y del método a seguir. Lo que no significa que debamos conocer todo lo realizado hasta ahora en la enseñanza de las matemáticas.

Pasada ya la época de reestructuración y reformulación de la enseñanza de la matemática a nivel internacional, las diferentes orientaciones de dicha enseñanza tienen como base la psicología en la que se fundamentan (y a la que acuden para justificarse) y el marco pedagógico en el que se pretenden situar. En este sentido encontramos posiciones dispares: desde aquellas que defienden programaciones lineales estrictas en las que la «materia a aprender» está lógicamente ordenada y descompuesta en pequeños items que el alumno ha de seguir paso a paso, hasta aquellas otras de tipo espontaneista que obvian cualquier programación previa y estructuran su trabajo sobre la base de experiencias vitales del grupo de alumnos. Ambos tipos se justifican con cantidad de argumentos y publicaciones.

Los materiales a emplear (máquinas de enseñar, fichas individuales programada, manuales programados, etc, para el primero de ellos, material diverso propio del entorno, para el segundo) están en función de las metodologías, de los caminos a seguir.

Obviamente hay más opciones que las mencionadas y bastantes materiales publicados. Conocer las diferentes tendencias, técnicas y materiales nos conduce a una selección por parte nuestra. La experimentación del camino elegido, con sus técnicas y materiales es lo que nos pondrá en situación de reafirmarnos en nuestra primera opción o de desecharla habiéndola contrastado con otras. O bien de intentar crear una opción propia y exclusiva para el grupo de alumnos a nuestro cargo.

C) MARCO PEDAGOGICO

La historia de la Pedagogía nos enseña cómo las corrientes pedagógicas que han ido surgiendo a través del tiempo, han estado en función tanto de la evolución cientifica y social, como de la ideología de sus promotores y defensores (toda pedagogía ha procurado sustentarse sobre bases científicas y dar una respuesta a las necesidades de la época, no incurriendo en una ruptura de valores condenable).

Cuestiones como las siguientes están en la base de cualquier pedagogía: qué es y qué debe ser la sociedad; qué es y qué debe ser el hombre; qué función se ha de asignar a la escuela, cuál al maestro; qué valores y conocimientos se han de transmitir y qué disvalores erradican; qué modelo de niño se quiere conseguir; qué es educar...

Las respuestas dadas a dichas cuestiones constituyen el módulo central de cualquier pedagogía.

La pedagogía no es entonces aséptica por mucho que se intente adjetivarla de «científica» y «neutral». Para construir una didáctica de la matemática y puesto que la didáctica tampoco es aséptica, hemos de situarnos en alguno de los marcos pedagógicos existentes, si es que ya no lo estamos (o edificar uno propio) por cuanto el niño es un «sujeto pedagógico», es decir, un individuo total, al que hay que ver en todas sus manifestaciones y no exclusivamente «sujeto de aprendizaje matemático». Hemos de plantearnos los fines y medios de nuestra didáctica específica como subordinados a los objetivos globales de la pedagogía que intentemos realizar. De hecho, los caracteres especiales del trabajo de cada maestro son expresión de un marco pedagógico previo en el que está situado, sea consciente de ello o no.

D) ALUMNOS, AULA, ENTORNO

Es posible concebir una didáctica teórica de la matemática apoyándonos en los factores señalados en los tres apartados anteriores: Psicología, Metodología, Pedagogía. Pero indefectiblemente fracasaría si no tuviera en cuenta lo más importante: la **condición de los niños** con los que se va a trabajar y las **posibilidades de aprendizaje** que ofrezca el entorno en el que viven.

Por condición de los niños entiendo: los niveles de desarrollo en los diferentes aprendizajes, sus intereses y apetencias, sus capacidades, sus conductas en el grupo.

Por posibilidades de aprendizaje entiendo: las características del aula, los materiales disponibles, el medio (rural, industrial, urbano, suburbial, etc.,) la estimulación familiar.

Si hemos de concretar la elaboración de una didáctica adecuada habremos de invertir ahora el camino recorrido: el orden de los factores A, B, C, D, hemos de cambiarlo, una vez adquirido conocimientos sobre ellos, y poner todo en función del último de ellos. Es decir, conocida la realidad (alumnos, medios, posibilidades) y hecha la elección de un marco pedagógico, seleccionaremos aquella metodología, aquellos materiales y técnicas que consideremos idóneos.

Con ello podremos trazar las líneas maestras de una didáctica.

Hemos llegado hasta aquí obviando dos factores importantes:

—Uno el conocimiento de la materia por parte del maestro.

—Otro, los propios alumnos en la dinámica del aula.

El primero de ellos, «saber matemáticas», lo vamos a dar por supuesto; el segundo es de la mayor importancia: todo el acopio de información que hubiéramos conseguido nos habría servido para elaborar un plan general de trabajo con sus contenidos, pasos y objetivos; pero el factor determinante para su puesta en práctica es el ambiente creado en el aula. y es aquí, en el aula, en el contacto directo con los alumnos, donde se percibe como superfluo el procedimiento de creación antes descrito. El teórico de la educación, el «científico de la pedagogía», se desenvuelven en un medio muy diferente al del maestro. Por eso mismo el camino que escoge para la elaboración de sus propuestas didácticas son, con frecuencia, imposibles de llevar a cabo. El maestro, a diferencia del teórico, recurre a otro modelo de creación aunque también se apoye en las «ciencias» de la educación.

No puede verse al alumno como sujeto exclusivo del aprendizaje matemático, el gusto de determinadas publicaciones. Las didácticas de este tipo más bien son procedimientos de adiestramiento y el alumno, individuo que debe salvar las trampas, las que el profesor le obliga puesto que ya están programadas para él.

Posiblemente si consideramos al niño como un todo vital enfocaremos nuestro trabajo desde una perspectiva global y dinámica. Hablaremos de experiencias y situaciones. Un ambiente en clase vivo, de libre expresión, de investigación, como el que pretendemos en el marco de la pedagogía Freinet induce al propio maestro a tomar, igual que los alumnos, una actitud de investigación. Es entonces cuando nos vemos llevados a poner en tela de juicio nuestra información y plan de trabajo previo y, sumergiéndonos en la dinámica viva del grupo, iniciar la apasionante experiencia de ir construyendo una didáctica propia. Propia en este sentido, significa, peculiar de este grupo de alumnos y del maestro. Se trata, pues, de ir creando el conocimiento, no en función de presupuestos teóricos por muy necesarios e importantes que los consideremos, sino a partir de la vida de la clase y en constante confrontación con la propia teoría.

La experiencia nos confirma que es necesario y posible crear o reiventar una didáctica en este sentido, aunque no sea generalizable ni válida para todas las escuelas. En ello hay ciertos pasos que quisiera indicar:

1. Dejarse llevar por la dinámica antes mencionada del aula, esto es, emprender aquellas experiencias, juegos e investigaciones que los alumnos proponen.

2. Emprendida la experiencia, intentar estrategias (ciertos pasos, juegos, etc) que conduzcan al aprendizaje de determinado concepto, al descubrimiento de algo nuevo para ellos, o a la adquisición de determinada habilidad.

3. Anotar posteriormente y fuera del aula, paso a paso lo sucedido e interpretarlo, yendo más allá de lo real.

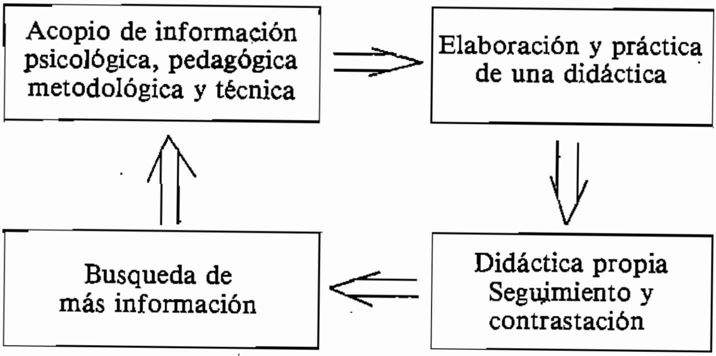
4. Lo anterior nos conduce a ofrecer posteriormente al grupo propuestas concretas elaboradas por nosotros a posteriori de lo observado y teniendo en cuenta las propias interpretaciones de los alumnos.

5. Retomar la experiencia anterior y otra distinta siguiendo las propuestas nuevas.

Nuestro trabajo, en esta perspectiva, consiste en guiar participativamente ofreciendo propuestas, aportando materiales ayudando a resolver situaciones, motivando. Tomar la costumbre de escribir lo sucedido en clase y reflexionar por escrito es fundamental para proseguir en nuestra propia investigación. Y si además colaboramos y contrastamos con otros compañeros, estamos ciertamente en el camino que nos conduce a la realización de una didáctica válida.

Los éxitos obtenidos trabajando de este modo nos reafirmarán en nuestros presupuestos iniciales. Sin embargo la necesidad de subsanar errores o la intención de buscar el mejor modo posible de enseñar nos reconduce a buscar más información (la información no sólo está en los libros) ya psicológica, técnica o de otra clase. Y con ello describimos un círculo en nuestro recorrido: del acopio de «información previo y programa de trabajo subsiguiente vamos a la realidad del trabajo diario el cual nos crea la necesidad de hablar, encontrar, buscar más información.

El siguiente esquema puede servir de sinopsis de lo anteriormente escrito:



II b

Bases teóricas

de esta didáctica

Queremos proponer un modo de trabajar la didáctica de la Matemática algo distinto de lo habitual. Hace tiempo que venimos trabajando en este sentido. Los resultados obtenidos nos reafirman en que ello es posible.

La didáctica que proponemos y que a lo largo de estas páginas trataremos de dibujar tienen fundamentalmente tres notas características.

a) Se apoya en hechos psicológicos evidentes constatados por gran cantidad de investigadores.

b) Precisan de una actitud y disponibilidad concreta del maestro.

c) Su práctica necesita cambios inprescindibles en la vida del aula y en la organización de los aprendizajes.

A la hora de construir una didáctica es cierta la necesidad de basarse en unos principios ya de tipo psicológico, ya de tipo pedagógico o didáctico. Sometida a evaluación dicha didáctica y efectuados los correspondientes cambios, correcciones o sustituciones dispondremos con el tiempo de algo realmente válido.

Es así como nuestro trabajo experimental ha evolucionado. Hoy estructuraremos nuestra didáctica alrededor de cuatro puntos fundamentales:

I. MOVIMIENTO
II. MANIPULACION
III. SIMBOLIZACION
IV. TANTEO. ACTITUD DE INVESTIGACION.
que trataremos de explicar brevemente.

I. MOVIMIENTO

Es conocido de todos la movilidad de los alumnos, dentro y fuera del aula. Ciertamente el movimiento es una necesidad infantil; de un lado la necesidad fisiológica del desarrollo físico; de otro, la necesidad psicológica, relacional. Por otra parte la psicológia del aprendizaje nos hace observar la importancia del movimiento en el descubrimiento del espacio y en la estructuración y apropiación del mismo (aspectos topológicos, métricos, etc).

Pues bien, los argumentos anteriores y la práctica escolar misma nos han conducido a considerar esa característica importante de la conducta infantil como factor fundamental en el aprendizaje de nociones matemáticas y en la estructuración misma del pensamiento matemático.

Actualmente es consideración común tomar como evidente el hecho de que para construir ciertas nociones espaciales fundamentales: arriba, más lejos, por fuera, etc, es importante que los alumnos se muevan y las construyan a través del movimiento personal. Sin embargo el movimiento parece ser olvidado en el aprendizaje de conocimientos lógicos o aritméticos.

Nosotros, por el contrario, tomamos el movimiento como factor fundamental en el aprendizaje de nociones lógicas, aritméticas y geométricas:

1) En la toma de conciencia de las propias acciones.
2) En la simbolización de acciones.
3) En la matematización de situaciones.

Tradicionalmente la didáctica matemática ha tenido un tratamiento estético al considerar que el aprendizaje de nociones o la ejercitación del mismo necesita solo de papel y lápiz, o a lo sumo alguna sencilla manipulación demostrativa (contar bolitas, comparar, agrupamientos de estrellitas, etc) No es que queramos oponer al estaticimo anterior un movimiento desenfrenado, pero sí hacer notar que el acto didáctico implica la utilización de todo el cuerpo.

Quizá la vieja división entre aprendizaje manual (móvil) y aprendizaje intelectual (estático) responda a planteamientos filosóficos de tipo socio-político que tomaban como hecho social irreversible la división del trabajo. Pero si tomamos el cuerpo como punto de referencia considerado en su globalidad y además optamos por una psicología dinámica del aprendizaje es posible que olvidemos la antinomia antes mencionada.

Más aun, es considerando al individuo de la interiorización de las acciones y de la coordinación de esas acciones interiorizadas, es factible coincidir en lo que queremos indicar al poner como base de nuestra metodología la noción de MOVIMIENTO. Movimiento es algo más que un mero «que los niños se muevan» o «que los niños muevan objetos». Advirtamos que la acción es móvil porque proviene de nuestra propia existencia.

Se dirá que el pensamiento matemático es otro, o bien, que la lógica es algo definido y abstracto, que no tiene que ver con el espacio, con el tiempo o con el movimiento. Quizá sea verdad pero lo que nos interesa es la formación del pensamiento matemático a partir, claro está, de las situaciones, vivencias, y acciones primeras y posibles de matematización. No es la ciencia sino la construcción, por parte del niño, de los peldaños elementales de esa ciencia lo que nos preocupa.

II. MANIPULACION

Gracias a la filosofía empirista conocemos la importancia de las sensaciones y de las percepciones para el conocimiento en el hombre. Conocemos, y los niños aun más, tocando, palpando, deformando los objetos,..

Sin embargo, el pensamiento, mejor aún, el pensamiento matemático no es posible construirlo sólo a partir de datos sensitivos o perceptivos sino sobre la toma de conciencia de hechos o acciones y la posterior coordinación de los mismos.

Manipular es una necesidad infantil tanto lúdica como de movimiento. Partiendo de esta consideración como evidente, así como de la precedente, tomamos como punto fundamental para la adquisición de nociones matemáticas la manipulación de objetos, ya sean diversos ya sean preparados para un fin determinado. Manipular objetos sirve para conocerlos pero no es nuestro objetivo en matemáticas el conocimiento en si de los objetos sino algo superior:

— Las relaciones que establezcamos entre ellos.

— Las acciones que hagamos con ellos.
— La toma de conciencia de las relaciones y de las acciones.

Esa toma de conciencia aparejada con su expresión, ya sea verbal, ya sea gráfica o simbólica, producida a consecuencia de la manipulación de objetos es el comienzo imprescindible en el aprendizaje de gran parte de los conceptos y operaciones matemáticas.

MOVIMIENTO Y MANIPULACION son hechos indisociables en multitud de ocasiones.

¿Cual es el material óptimo para manipular? No parece claro que sea sólo el material estructurado, aunque en el mercado haya alguno de indudable calidad como el de Dienes o el de Guissenaire. Como tampoco parece claro que los partidarios acérrimos del uso siempre de material no estructurado lleven razón. Somos partidarios del uso de todo tipo de material ambiental, sin excluir para determinados casos el estructurado comercializado, porque ponemos el acento en el sentido de la actividad que el alumno realiza, en la toma de conciencia de lo que realmente efectúa con el material y en su transcripción simbólica posterior. El material por si sólo no construye los conceptos.

De la pedagogía intelectualista en la que la manipulación de objetos se veía como algo innecesario e incluso como ajeno a la estética y excelsitud del pensamiento matemático, se ha ido pasando a una pedagogía activa en la que se recurrió a los objetos para demostrar al alumno alguna propiedad de determinada operación, o bien como apoyo para la memorización de algoritmos. Es esta una pedagogía que mantenía los antiguos presupuestos filosóficos de la educación pero que se apoyaba en evidencias psicológicas para algún tema puntual.

Más allá de ambas visiones nosotros queremos tomar el concepto de MANIPULACION en su sentido más amplio y ponerlo en el centro de nuestra metodología con un significado diferente. Manipular, así lo entendemos, no es sólo manejar objetos.

Si un primero, necesario e inevitable paso es el conocimiento de ciertos objetos de nuestro entorno, un segundo paso es el establecimiento de ciertas relaciones entre ellos o bien la ejecución de determinadas acciones y construir la matemática a partir de esas relaciones y acciones.

El término «**objetos**» no designa solo piedrecitas, bolas o gomets; es extensible a los propios alumnos, a las mesas y sillas del aula; es decir, a todo aquello que el alumno pueda poner bajo su voluntad y manejarlo a discrección. Más adelante, siguiendo la evolución propia del desarrollo de cada niño, los objetos no son sino sucedáneos de objetos reales, esto es, representaciones de objetos que nos remiten a las cosas reales de modo paralelo a las acciones. Estas, en principio, se ejecutan, realmente; con posterioridad, es decir, ya interiorizadas, su evocación es suficiente, generalmente, para la reflexión sobre ellas.

En un nivel superior, los conceptos matemáticos construídos (números, operaciones, etc), son considerados igualmente objetos y se juega con ellos efectuando operaciones al margen de los hechos reales.

MANIPULACION, es necesario puntualizar, no significa entonces exclusivamente, el manejo de objetos reales sino algo más, como arriba se ha indicado. Del mismo modo el término OBJETOS no se constriñe al de cosa palpable.

Es conveniente, por otra parte, distinguir entre manipulación demostrativa y manipulación investigadora.

Cuando para la explicación de algun concepto o algun algoritmo el maestro recurre a cierto material con la intención de apoyar su explicación, nos movemos dentro del ámbito de lo que podríamos denominar manipulación demostrativa o ilustrativa. Sin embargo cuando el profesor pone a disposición de los alumnos algún material, se juega con él y se inicia un camino de búsqueda de propiedades de clasificaciones, de relaciones entre los elementos, ect., estamos en el ámbito de la manipulación investigadora. Y es esta idea de manipulación la que nos interesa y la que ponemos como punto fundamental de nuestra didáctica.

MOVIMIENTO Y MANIPULACION son dos aspectos esenciales de la conducta humana al mismo tiempo que dos pilares básicos en el niño para la aprehesión del medio que le rodea. Nuestro trabajo como pedagogos consiste en aprovechar esas enseñanzas que nos aporta la psicología del aprendizaje y construir una didáctica de la matemática utilizando dichos pilares.

No está demás insistir en que la enseñanza de las matemáticas adolece de un excesivo simbolismo que el profesor hace «ingerir» a los alumnos. Se hace necesario dar paso a la experiencia, a la manipulación concreta incluso en temas del C. Superior (enteros, fracciones, ecuaciones, áreas...,) como más adelante tendremos ocasión de exponer.

III SIMBOLIZACION

Teniendo en cuenta lo dicho sobre MOVIMIENTO Y MANIPULACION se puede colegir que el aprendizaje matemático, al menos en los cursos iniciales, se basa en acciones reales. Partimos de la idea de que una operación matemática a nivel infantil, es, en un principio, una acción, que puede realmente efectuarse con el cuerpo y/o con objetos.

Una acción es matematizada construyendo el lenguaje apropiado para su expresión y su consecuente representación gráfica que acaba en nociones estandar con números, letras y otros signos. El lenguaje matemático que nace de este modo se convierte en mediador entre el pensamiento y la acción. Al proceso de construcción del lenguaje matemático es a lo que llamamos proceso de SIMBOLIZACION.

Por su propia naturaleza el proceso de simbolización tiene un tratamiento colectivo, esto es, el grupo va paulatinamente creando el código.

Tomemos como ejemplo la simbolización de la resta o de cualquier otra operación que se cita más adelante. En la simbolización de cualquiera de ellas se observarán unas constantes:

— Primero manipulación de material o bien narración de una «historia-problema» inventada o efectivamente sucedida.

— Después representación gráfica de lo realizado con el material o de la «historia». Si bien las **representaciones** primeras son de **tipo figurativo** progresivamente van consiguiendo ciertos esquematismos.

— Las representaciones expuestas en la pizarra, son distintas y el grupo selecciona la que considera más conveniente. Este proceso de progresiva selección concluye en un único signo y una única expresión simbólica para todo el grupo.

— El último eslabón del proceso es el trabajo exclusivamente a nivel simbólico con los signos que el grupo haya hecho suyos.

Paulatinamente las expresiones simbolizadas, que nacieron de situaciones reales, tienden a sustituir a la acción efectiva misma, tomando de este modo vida propia. Si al principio el trabajo matemático estriba en la construcción de las expresiones simbólicas de ciertas acciones más tarde se trabaja, sólo sobre las expresiones mismas, lejos ya de la acción. la matemática deviene de este modo en un lenguaje específico creado por los propios alumnos; lenguaje que, aún haciendo referencia a lo real por haber nacido de la realidad, tiene autonomía por si mismo. Llegamos con esto al final del proceso: servirse del lenguaje colectivamente creado para operar con él; entonces una operación matemática no puede verse ya como una acción interiorizada sino como una coordinación de relaciones entre signos.

Consideramos la matemática como un lenguaje. Desde el punto de vista didáctico tal consideración tiene dos características:

a) La elaboración de signos y de las normas que lo rigen es un proceso colectivo, una reinvención o creación del grupo de alumnos del aula que pone de manifiesto que el lenguaje matemático es convencional, y por eso mismo modificable.

b) El lenguaje así creado, llega a convertirse en herramienta para resolver una gran diversidad de situaciones y hechos. los modos de utilizar la herramienta, es decir, el modo de resolver determinadas situaciones, también es convencional.

La hipótesis piagetiana sobre el isomorfismo entre estructuras operatorias del sujeto y estructuras matemáticas elementales ha sido una de las más fecundas pues ha dado lugar a gran cantidad de investigaciones sobre el aprendizaje matemático, sobre todo en los primeros niveles. Investigaciones que han aportado conocimientos sicológicos y sugerencias al campo de la Didáctica. Pero también, a nuestro juicio, han sido desgraciadamente la causa que ha llevado a diseñar didácticas excesivamente psicologistas.

Nos conviene, por tanto, no incurrir en esos errores y adoptar, no ya la perspectiva del psicólogo o la del investigador de laboratorio, sino la del pedagogo, colocándonos en el lugar del alumno y partiendo de aquello que el alumno parte: la matemática es para él unos signos, un jeroglífico, un lenguaje que no sabe descifrar pero que quiere conseguirlo. Para nosotros, en nuestro trabajo escolar, se nos muestra más fecunda la concepción didáctica de la matemática como un lenguaje, al tiempo que aprovechamos las aportaciones que nos parecen interesantes de otras disciplinas ajenas a la Didáctica.

¿Cómo construir el lenguaje matemático?. Invirtiendo los términos de la pedagogía tradicional y suplantando la

explicación directa y el libro de texto por la invención y el descubrimiento colectivo de signos y expresiones apropiadas a determinadas acciones o situaciones.

Desde el punto de vista metodológico conviene enfocar el trabajo desde la perspectiva de la «naturalidad del aprendizaje», es decir:

—Aprovechar las situaciones que surjan en clase susceptibles de matematización.

—Apoyarnos en las estrategias primeras «naturales», espontaneas, de resolución de la situación o del problema para reconducirlas o profundizarlas.

—Partir siempre de las representaciones gráficas espontaneas o «naturales» para, sobre ellas y por convención colectiva, ir construyendo el lenguaje simbólico propiamente matemático.

Pretendemos con ello situarnos dentro del marco de la pedagogía Freinet y ahondar en la línea de los «métodos naturales». Ahora bien, el término «natural» en lo que respecta a situaciones matemáticas, estrategía de resolución y simbolizaciones precisa una matización: por «natural» no debe entenderse aquello que es inmanente a la naturaleza humana, o aquello que naturalmente emana de la actividad humana pues haríamos uso de un lenguaje ambiguo toda vez que la escuela es un medio artificioso, no precisamente «natural» y que además, difícilmente pueden establecerse barreras entre lo que es natural y lo que no es.

Por «naturales» habremos de entender aquellos mecanismos operatorios y aquellas representaciones simbolizadas que surgen en los niños espontáneamente. Ante una situación o problema nuevo el niño se apoya en modos de operar, en razonamientos, en esquemas que ya posee con anterioridad y que forman parte de su manera de actuar y pensar. Que sean congénitos o adquiridos no nos importa. Lo importante es partir de lo que ya poseen los alumnos, de lo que son capaces de hacer para posibilitarles niveles de desarrollo superiores.

Sabemos que los mecanismos operatorios y el uso de simbolismos son muy diferentes en la E.G.B. Así, por ejemplo y como en los capítulos siguientes veremos, los niños de 6 a 8 años tienden, en las primeras fases, a hacer uso de representaciones figurativas inciertas y que en edades superiores la figuratividad desaparece en favor de grafos y otros signos. Véase y compárese las experiencias de SUMAR o RESTAR con la de los NUMEROS CON COMA.

En otro sentido conviene matizar la «naturalidad del método. El lenguaje matemático es convencional, es un producto cultural emanado de la actividad (saltamos la distinción entre manual e intelectual); los niños «por sí solos» no llegan a la creación de dicho lenguaje, que no es sino una herramienta que ellos van colocando al servicio de su propio pensamiento.

El maestro no tiene por menos que **dirigirse**, aún con todas las reservas que hagamos a esa palabra, la construcción colectiva del lenguaje.

Tengamos presente que las estructuras lógico-matemáticas no nacen de la experiencia física directamente, la inducción experimental no determina al pensamiento lógico-matemático, ni tampoco, de modo inverso, la experiencia física está determinada por las estructuras lógico-matemáticas. Está comprobado que la formación del pensamiento matemático tiene lugar en un proceso en el que se simultanean, se determinan sincrónicamente ambos niveles. ¿Qué papel juega en ese proceso el lenguaje?; ¿cuál es su importancia?, ¿crear el código y sus reglas de uso colectivamente a la construcción de conceptos y esquemas operatorios matemáticos?. Cuestiones interesantes a las que esperamos dar respuesta en otro trabajo. En éste permaneceremos en el terreno de la didáctica reseñando debidamente la importancia que debe darse a la creación del código.

En resumen y contestando a la pregunta, partimos siempre, tanto en los primeros niveles de la E.G.B. como en los últimos, de una acción o de una situación problemática. La resolución de dicha situación nos lleva a la expresión codificada de la misma, codificación que se hace en grupo. Esto, que es lo que donominamos PROCESO DE SIMBOLIZACION, se nos revela como clave en el aprendizaje matemático en todos los niveles escolares, desde la construcción de la suma hasta cuestiones como ecuaciones y números enteros.

IV - TANTEO - ACTITUD DE INVESTIGACION

De los tres apartados anteriores puede deducirse que la didáctica que tratamos de practicar es una didáctica de creación colectiva. Nos apoyamos en los principios de la pedagogía activa pero, desde nuestro enfoque, ésta nos parece insuficiente.

La matemática es, desde el punto de vista didáctico, toma de conciencia, creación de lenguaje y descubrimiento. Es investigación.

Una operación matemática no se aprende si no es reinventándola, construyéndola personalmente. Las relaciones espaciales, las relaciones númericas, los diferentes modos de resolver problemas, etc, se aprenden efectívamente cuando el individuo los hace suyos, los asimila y los usa como propios. y esto sucede sólo cuando el alumno descubre personalmente relaciones, coordina personalmente acciones, construye él mismo conceptos. Es decir, toma ante la matemática la actitud de investigación y descubrimiento que naturalmente toma ante otros aspectos del mundo que le rodea.

La pedagogía tradicional considera la matemática escolar como un saber codificado que cada alumno debía registrar en su mente.

La pedagogía activa parte del mismo enfoque, pero se ayuda de materiales y de la actividad del alumno para que este registre ese saber codificado.

Nosotros no consideramos la matemática escolar como un saber codificado que debe ser aprendido, sino como un saber a recrear, como unos conocimientos codificados por los adultos que pueden efectivamente ser descubiertos y codificados por los propios alumnos; como un lenguaje a recrear colectivamente; como unos modos de razonar que se construyen personalmente valiéndose de los códigos convenidos por el grupo.

La actitud del alumno no es entonces la de receptor o registrador de conocimiento, sino la de investigador. Es el gestor de su propio aprendizaje, con la ayuda y los condicionamientos que la escuela le ofrece.

Este enfoque de la actividad matemática, tiene obviamente importantes consecuencias en lo tocante a programas, niveles, dinámica en aula, conducta de maestros y alumnos y de utilización de textos. Consecuencias de las que más adelante hablaremos.

III

Metodología

Cada didáctica requiere unos elementos que le hagan factible: orden y silencio, obediencia al maestro, libros de texto programados etc. o bien, una dinámica grupal viva, materiales que susciten la investigación, etc.

La didáctica que propugnamos necesita unos elementos que pueden quedar agrupados en dos núcleos fundamentales:

— Clima de investigación.
— Programación.

A) CLIMA DE INVESTIGACION

Hemos visto en la introducción, que es necesario que el alumno adopte ante la matemática una actitud investigadora.

Al maestro corresponde propiciar esa toma de actitud creando un clima de investigación en el aula que posibilite el desarrollo o el nacimiento de actitudes investigadoras:

Es necesaria, en este sentido, la ausencia de elementos coactivos, provocadores de frustraciones, angustias y bloqueos. Castigos, notas y exámenes son, casi siempre, elementos de coacción que el sistema escolar pone a disposición del maestro y cuyas consecuencias son de sobra conocidas.

El uso del libro de texto de matemáticas, más aun en los niveles inferiores, choca frontalmente con una didáctica de investigación cuyo objetivo sea el descubrimiento y construcción por parte del alumno. El libro de texto, o mejor dicho, la enseñanza basada en el uso del mismo, pretende dirigir y constreñir de tal modo el aprendizaje, que no le da posibilidades a la libre iniciativa del alumno y del grupo. A la directividad del clima autoritario, profesor y texto es conveniente oponer posibilidades de tanteo, de iniciativas individuales o grupales. Partir de vivencias o de propuestas de los alumnos y no del libro de texto o de la inercia del maestro.

Disponer de materiales para matemáticas es imprescindible toda vez que el libro de texto pierde su espacio.

La distribución del tiempo escolar ha de ser diferente. No puede seguirse un horario rígido por razones obvias pero sí hay que tener presente que la matemática necesita un tiempo exclusivamente para ella. La enseñanza que pretendemos tiene muy en cuenta los conceptos de globalización e interdisciplinaridad pero, aun articulándose, en torno a ellos, cuestiones como el aprendizaje de ciertas técnicas operatorias, o la simbolización de nociones o aspectos estrictamente geométricos o aritméticos necesitan de un tratamiento exclusivo en un tiempo dedicado especialmente a ellas.

B) PROGRAMACION

La elección del objeto de investigación está en función siempre de las propuestas de los alumnos.

Las propuestas varían de amplitud: van desde asuntos puntuales como es querer «saber números grandes» hasta otras de gran amplitud como «aprender a medir campos» o «hacer planos».

Sea cual fuere el objeto de investigación es necesario que, determinado lo que se quiere investigar, el maestro haga un diseño curricular modificable, con previsión de actividades y materiales y tome él mismo actitud investigadora ante el tema. El desarrollo del curriculum preparado inicialmente se irá, con seguridad, modificando en función de la práctica y orientándose a metas no previstas surgidas a tenor de nuevas iniciativas de los alumnos.

Una propuesta como por ejemplo «aprender a hacer mapas», da ocasión de alcanzar bastantes conceptos geométricos, lo cual puede preveerse pero será la práctica lo que vaya marcando el ritmo y la orientación de los aprendizajes. Es imprescindible, pues, desechar las programaciones estrictas, con objetivos definidos de antemano por el texto o por el maestro y que acaban siempre en evaluación de lo conseguido, por diseños abiertos, modificables y subordinados a las iniciativas y expectativas de los alumnos.

ESQUEMA METODOLOGICO GENERAL

Vamos a proponer un esquema-guía de actuaciones en el aula entiéndase dentro del contexto e idea de escuela antes dibujado que ha sido depurado a través de varios años de trabajo. Dicho esquema es considerado válido para todos los niveles de E.G.B.

Veamos:

A) PARTIR SIEMPRE DE UNA SITUACION O HECHO O PROBLEMA

La situación o hecho es problematizado por el maestro, que recaba su solución. Unas veces será real, surgida de la dinámica de la clase: clasificar los materiales recogidos en una salida al medio, formación de equipos para competiciones, etc,. La cooperativa de clase, la organización de una excursión, la edición de textos o poesías.., son ocupaciones aprovechables para el aprendizaje matemático.

Otras veces la situación es propuesta por el maestro o por algún alumno.

En ocasiones las situaciones son preparadas por el maestro según el diseño que tenga previsto: pero a veces surgen imprevistos que la habilidad del maestro los puede hacer aprovechables; cumpleaños, repartos de caramelos, edades, correspondencia escolar, etc.

B) INTENTO DE SOLUCION

Las situaciones, una vez problematizadas, requieren solución. La búsqueda de solución puede ser individual, grupal o colectiva.

Es preferible un aprendizaje en cooperación no excesivamente individualizado, no sólo porque es más eficaz, sino también porque aviva la dinámica de la clase al tiempo que es más formativo.

Si las soluciones son buscadas por el grupo -clase- la intervención del maestro ha de ser de moderador.

C) DISCUSION Y CONVENCION

Se exponen las distintas soluciones o modos de resolución de la cuestión planteada. Por medio de sucesivos debates se va conviniendo en signos, soluciones o manera de resolver, una situación. Una vez convenido un símbolo, una solución o una técnica, el grupo de clase, la hace suya y en adelante será la utilizada por todos.

D) GENERALIZACION

Denominamos generalización al trasvase de un esquema de resolución de una situación a otra, u otras situaciones similares. La generalización es progresiva y depende fundamentalmente del trabajo individual del alumno.

De los puntos 1, 2 y 3 del esquema se puede extraer que el modelo de funcionamiento es colectivo, por ser ello mismo motivador, y que la actividad así organizada tiene carácter de creación y/o de descubrimiento colectivo.

Pero lo fundamental en el aprendizaje es la búsqueda individual, el descubrimiento personal, la extensión progresiva de lo aprendido, la ejercitación. Por eso, convenidas colectivamente ciertas normas, símbolos o técnicas, incidimos en la generalización: proceso de avances y retrocesos pero siempre de tipo individual. El trabajo de ejercitación individual es imprescindible.

La alternancia de momentos, de trabajo colectivo y de trabajo individual está siempre en función de la dinámica de la clase y del progreso de cada individuo; no está en función de un texto o de un programa previo que necesariamente haya de realizarse.

LIBROS RECOMENDADOS

«La enseñanza del cálculo» y «El razonamiento lógico y matemático» de Freinet y de M. Porquet respectivamente, editadas por editorial Laia son dos obritas representativas de cómo se ha entendido la pedagogía de las matemáticas en el movimiento Freinet..

Las cuatro obras que se citan a continuación ofrecen sendos enfoques cuyo contenido es importante conocer:

— «Didáctica de la matemática moderna» de E. Castelmovo, editorial Trillas, México.

—«La matemática moderna en la Enseñanza Primaria» de Dienes, ed. Teide.

—«Las matemáticas, cómo se aprenden, cómo se enseñan» de G. Mialaret en Pablo del Río-Editor.

—«La enseñanza de las matemáticas modernas» Piaget y otros en Alianza Editorial.

IV

Experiencias-
Operaciones

Las narraciones de experiencias en las páginas que siguen tiene por objeto ilustrar la metodología de fondo. En este sentido la opción elegida ha consistido en tomar grandes campos matemáticos escolares (fracciones, multiplicación, resta, etc) y desarrollarlos, es decir seguir el camino que recorren los alumnos en el aprendizaje de los mismos desde que lo inician hasta que se considera concluído.

En este tomo se tratan las cuatro operaciones aritméticas básicas; el tomo II está dedicado a cuestiones de geometría y temas de Ciclo Superior.

IV a

Suma

SUMA

El proceso que acaba en la operación ADICION y su inversa, la SUSTRACCION, puede partir del trabajo cualitativo sobre la realidad con colecciones concretas. Clasificaciones, seriaciones y ciertas relaciones van sentando las bases de lo cuantitativo. El trabajo sobre colecciones de objetos desencadena sucintamente la curiosidad por lo cuantitativo provocando el surgimiento de relaciones como «hay más», «hay tantos como» etc, etc,. Y esa es la base para la construcción de los primeros números, cosa que debe hacerse bajo el enfoque de cardinación. La orientación y el lenguaje que perseguimos utilizar son conjuntistas.

Se puede objetar que no hay constancia, documentalmente comprobada, de que la iniciación a la ADICION precise de un extenso prólogo de clasificaciones, seriaciones y nociones conjuntistas pues con el trabajo con números es suficiente. Pues bien, sin ánimo de polemizar, las razones por las que preferimos ese trabajo previo son de dos tipos:

— Son actividades que van encaminadas a tomar conciencia de lo que hacemos con objetos o colecciones de objetos.

— El desarrollo de dichas actividades va proporcionando el hábito de simbolizar y trabajar con símbolos, aspecto éste que es fundamental en el aprendizaje matemático.

Partimos en la clase de experiencias globales y de ellas extraemos aquellos aspectos susceptibles de tratamiento matemático tomando como referencia la peculiar idiosincracia del grupo de alumnos.

No partimos como es usual, de una ordenación por temas: conjuntos y relaciones, numeración, operaciones y por último geometría.

Nuestra atención no se centra en el seguimiento de un programa sino en la dinamización del grupo, en la base experimental del aprendizaje y en la construcción colectiva del lenguaje. Unas son experiencias globales de larga duración como las del calendario y las del seguimiento del crecimiento de las plantas. Otras son puntuales, expontáneas o preparadas al efecto por el maestro.

Sin embargo el aprendizaje matemático, creemos, requiere en determinados puntos un cierto grado de sistematización y diseño progresivo, con un tiempo específicamente dedicado a él, sin que por ello se obstruya el sentido globalizador de la pedagogía aplicada en clase.

Antes de entrar directamente en el tratamiento de la SUMA como operación aritmética resulta conveniente ir creando algunos conceptos previos, así como cierto estilo del trabajo y el lenguaje apropiado. Es por eso por lo que al iniciar el curso primero del Ciclo Inicial es procedente enlazar con el trabajo desarrollado, en Preescolar sobre clasificaciones, seriaciones y construcción de los primeros números. Hablemos, aunque sea brevemente, de cada uno de estos tres puntos.

SERIACIONES. ORIENTACIONES. RITMOS.

Proponemos una forma de trabajar estas cuestiones inversa a la habitual, aquella que queda reducida a la realización de los ejercicios del texto. Así pues, utilizaremos todo tipo de material discontínuo, manipulable, que se haye en el ambiente propio de los alumnos: Chapas, botones, cromos, tapones, monedas, etc.., y también, si lo poseemos, material estructurado y comercializado, por ejemplo, el de Dienes. Jugaremos con el material libremente, alternando con juegos o actividades dirigidas. Con el tiempo iremos representando, simbolizando, lo que hacemos con el material y creando la forma más apropiada de expresar verbalmente lo que hacemos. Cuando los alumnos hayan pasado por todo ese proceso es cuando estarán capacitados para realizar ejercicios gráficos de seriaciones.

Hagamos por ejemplo, la experiencia de colocar a todos los alumnos junto a la pared o en el patio según un determinado orden: un niño-una niña, un niño-un niña. Podemos pedir que los alumnos sugieran otras formas ordenadas de colocarse. Sin duda que aparecen otras: Los niños, una niña.., uno sentado, otro de pie, uno sentado, otro de pie..., tumbado, levantado, tumbado, levantado.., etc.

Es conveniente trasladar a continuación esas situaciones al papel y representarlas. Un alumno propone una de las formas anteriores y los demás la dibujan.

En situaciones como ésta aparece la necesidad de simbolizar, es decir, de «no dibujar de verdad» a los niños y a las niñas, sino de la forma más simple posible.

Si en clase disponemos de bloques lógicos o algún material similar podemos jugar al juego de «quién sabe el truco». Situados todos los alumnos frente al maestro, (el suelo libre) éste coloca unas cuantas piezas en fila con una estructura, por ejemplo, cuadrado-cuadrado-círculo; cuadrado-cuadrado-círculo; cuadrado...

El alumno que descubre «el truco» de colocación sale y pone la pieza siguiente correspondiente; luego sale otro y así sucesivamente. Este modelo de juego ofrece variantes y resulta atractivo.

Hagamos acopio, por ejemplo, de chapas y tapones de corcho y llevémoslos un día a clase. Repartiremos el material dando a cada uno un buen puñado mezclado de ambos tipos de material. El juego, esta vez, consiste en que cada uno empieza a colocar su material siguiendo el que quiera, pero sólo pone unas cuantas piezas.

A una señal, se corren todos un puesto de modo que el que estaba construyendo su serie llega a la mesa de al lado y debe continuar la que ya hay iniciada, previo descubrimiento de la estructura.

Experiencias como las anteriores (en educación corporal y en plástica se suelen hacer otras de ritmos muy apropiadas) van sentando las bases de la construcción, por parte de los propios niños, de series y ritmos. Con estas experiencias se intenta crear el sustrato vivencial necesario para el futuro trabajo de números y cantidades.

Resulta más apropiado trabajar estas cuestiones con pequeños grupos, sobre todo con alumnos más débiles. Cojamos material, por ejemplo, el anterior -chapas, corchos- y démosle a los chicos. El maestro inicia una serie; cada chico la imita en su mesa o en el suelo y la continúa pero siempre es aconsejable que la vaya verbalizando al tiempo que la realiza, antes o después de ello. Este mismo tipo de manipulaciones conviene sustituirlas por representaciones de modo que se llega a convenciones sobre el símbolo de cada objeto y se efectuan ya solo a nivel gráfico.

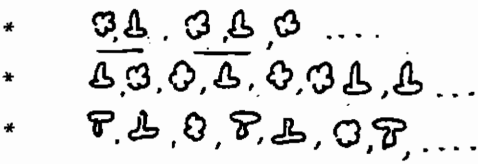
Nos interesa tener en cuenta algunas observaciones:

A) Trabajar siempre primero a nivel real y perceptivo. Después trasladar lo mismo a nivel gráfico intentado convenir colectivamente los símbolos. Cuando consideramos como suficiente la base experimental entonces podremos elaborar fichas de trabajo personal que, a lo largo del curso, irán resolviendo y que serán cada vez más complicadas.

B) El modelo de serie que presentamos para ser continuado debe tener dos ritmos y medio; o sufiente para que pueda percibirse la estructura y quede abierta para inferir qué objeto ha de colocarse o dibujarse a continuación.

Sean chapas, que representaremos así: 
y corchos, 

Las series podrán ser:



O bien otras semejantes.

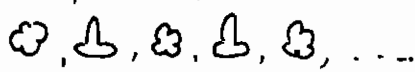
C) A veces conviene apoyar el ritmo de la verbalización con sonidos, palmadas o gestos al modo como se suele hacer en educación corporal.

D) las ordenaciones crecientes (tamaños, longitudes, alturas...) y decrecientes son interesantes aunque no dificultosas. Son complicadas, por el contrario, las que alternan el orden creciente. Por ejemplo:

* 
* 1, 9, 2, 8, 3, ...

E) El orden progresivo de dificultad es el siguiente:

1) Estructuras binarias:

* A, B, A, B, A ....
* 

2) Estructuras de dos a uno, dos a dos, o uno a dos; tres a uno, etc, pero con dos tipos de elementos en juego: corchos y chapas, niños y niñas, números y letras, etc.

* 1, 2, a, 3, 4, a, 5, ...
* 

U otras de mayor complicación.

3)Estructuras en que entran en juego tres tipos de elementos o tres características, al estilo de las anteriores. Por ejemplo:

*

F) Es importante saber que en muchos chicos hay una progresión grande en ordenaciones y seriaciones a nivel perceptivo a los 5 ó 6 años pero que se produce en ellos una regresión hacia los ocho años, con series en los que prima una estructura no ya meramente perceptiva pero que ello no supone un retroceso sino una reorganización de sus esquemas de razonamiento.

Detenemos aquí nuestra exposición sobre las seriaciones recordando que es un tema a tratar a lo largo de varios cursos y que lo expuesto se refiere a nivel inicial.

CLASIFICACIONES

El tema de las clasificaciones constituye la piedra de toque de la polémica entre las diferentes tendencias de la pedagogía de las matemáticas. Mientras los logicistas consideran este asunto como clave en el desarrollo del pensamiento matemático del alumno, los más aritmetistas las obvian por considerarlas innecesarias. Eludiremos la polémica aduciendo que nosotros las trabajamos experimentalmente, fuera del enfoque academicista, y que a partir de ciertas experiencias intentamos construir determinados conceptos que nos parecen claves.

El trabajo sobre clasificaciones no es cuestión de unas cuantas sesiones escolares, un mes ó un trimestre. Es un trabajo permanente de ejercitación de la actividad lógica, con enfoque conjuntista o no conjuntista, y que aparece en multitud de ocasiones en la vida del aula. Por lo tanto, su enseñanza es aconsejable a lo largo de varios cursos.

Adjuntamos un esquema-guía de las clasificaciones en orden de complejidad, practicable desde Preescolar hasta el Ciclo Medio incluído con la creencia de que es bueno para el maestro tener una visión de conjunto del trabajo clasificatorio a nivel didáctico. En realidad el trabajo clasificatorio comienza hacia los cuatro años con experiencias de agrupar o separar objetos siguiendo un criterio clasificador (color, forma, para lo que sirven, materia, tamaño, etc.) y prosigue hasta que son capaces de operar ya a nivel de clases, fuera de las colecciones concretas y manipulables.

Las experiencias didácticas tendrán como finalidad ayudar al niño a que llegue cuanto antes mejor a la noción de clase y razone a ese nivel.

1.— CLASIFICACIONES LIBRES

— Descubrimiento (verbalización) de atributos y relaciones.
— Nociones de conjunto y de pertenencia.

2.— CLASIFICACIONES DICOTOMICAS AFIRMATIVAS

— Noción de conjunto referencial o universo.

3.— CLASIFICACIONES DICOTOMICAS POR NEGACION

— Uso del NO.
— Complementariedad.

4.— SIMBOLIZACION

— Representación de las clasificaciones: columnas, filas, diagramas de Venn, tablas simples, etc.

5. SUBCLASIFICACIONES

— Nociones de subconjunto e inclusión
— Esquema arboreos, diagramas Venn.
— Importancia del lenguaje.

6.— CLASIFICACIONES TENIENDO EN CUENTA DOS ATRIBUTOS

— Intersección.
— Disyunción.
— Tablas de doble entrada.

Consideramos importante el uso de los conceptos y terminología conjuntistas que aparecen en el esquema, aunque no decisivo. Lo que sí es decisivo es el trabajo experimental sobre situaciones que provoquen el surgimiento de razonamientos lógicos. De esas situaciones nace la necesidad de usar palabras, términos y símbolos que las expresen y acoten mejor, es decir, nacen los conceptos los cuales precisan de alguna palabra para denominarlos.

Que esa palabra sea la del lenguaje conjuntista es ya convencional. Está demostrado que es la base experiencial la que va conformando progresivamente el pensamiento lógico. De la misma manera es conocimiento común que sin los razonamientos lógicos básicos, los alumnos no alcanzan el dominio de las cuatro operaciones aritméticas elementales.

Siempre nos hemos pronunciado en contra del uso abusivo del libro de texto. En lo que respecta a la temática de conjuntos, clasificaciones y lógica es norma común que el maestro se ciña a lo que viene en el texto forzando así a los niños a que resuelvan unos ejercicios cuyo significado no alcanzan a comprender. La parte de los libros dedicada a esta temática aparece ante el chico como un jeroglífico, un lenguaje que no puede comprender porque carece de la base experiencial de la que se han abstraído esos conceptos y términos que se le presentan ya elaborados para ser aprendidos.

Deberemos, en consecuencia, virar el enfoque metodológico y comenzar por experiencias y situaciones aprovechables, los términos apropiados y las representaciones gráficas idóneas. Después sólo después, podrán los chicos ejercitarse realizando ejercicios y actividades como las contenidas en los textos escolares, algunas de ellas muy interesantes. Veamos algunas experiencias.

Podemos salir del aula -o aprovechar una salida de otro tipo- con la recomendación de que cada uno coja cosas que le gusten pero no muchas: piedrecitas, hojas, flores,... De vuelta a clase propondremos lo siguiente: cada uno coloca las cosas recogidas sobre su mesa; con ellas puede hacer lo que quiera. No tardaran muchos minutos en surgir casitas hechas con palitos u hojas a modo de dibujos, barcos, castillos, etc. Seguiremos la experiencia rotando, es decir, corriendo cada uno un puesto, con lo cual se abandonan los objetos propios y se encuentran con otros nuevos; con estos nuevos podrán inventar nuevas cosas y contarlo a los demás.

Llegados a un punto conviene cambiar el juego. Ahora, en lugar de inventar figuras o combinaciones, trataremos de que clasifiquen. Daremos la consigna de que agrupen sus objetos colocando juntos los que deban ir juntos. Pediremos a continuación que explique cada uno lo que ha hecho. El juego puede continuar en este sentido corriendo un puesto cada uno, deshaciendo la clasificación que había hecho el compañero anterior y haciendo una nueva.

Experiencias similares de creatividad y de clasificaciones libres podemos hacer sin salir del aula: utilizando material diverso. Agrupemos los alumnos de dos en dos y démosle un puñado de elementos diversos: chapas, tapones, corchos, botones..., después de un tiempo de toma de contacto, propondremos la consigna siguiente: agrupar colocando junto lo que deba ir junto. Primero lo hará uno de cada dos niños, luego el otro. De aquí iremos hacia la idea de cualidad, característica común o criterio de clasificación. La consigna será agrupar pero «fijándose sólo en una cualidad («cosa»); color, forma...» Paulatinamente irán verbalizando lo que hacen apareciendo criterios interesantes:

— «Aquí he puesto los redondos y aquí los otros»
— «Yo he hecho tres montones: los que son de plástico, los que son de madera y los otros».

Las imperfecciones de expresión las iremos corrigiendo y llegando a una expresión estandar. El diálogo interrogativo o socrático con los alumnos es indispensable: «¿Qué tienen en común («en qué se parecen») los elementos de este montoncito?», «este elemento que tengo aquí ¿donde lo pondrías?», etc.

Otro día cambiaremos de material y trataremos de realizar las mismas consignas, incluso será importante plantear situaciones inversas como, por ejemplo, en este juego: uno de los dos alumnos efectúa una clasificación mientras que el otro está de espaldas; cuando haya acabado, el que estaba de espaldas se vuelve y debe averiguar el criterio «en qué se ha fijado para clasificar» o «cómo ha clasificado» y seguidamente hacer una nueva clasificación que luego el primero de ellos tendrá que adivinar. De este modo irán turnándose hasta que uno de los dos no halle más maneras de clasificar.

Ordenar los armarios, la biblioteca de la clase, colocar los dibujos para embellecer las pareces, ordenar cada niño sus propias cosas, son actividades aprovechables de clasificaciones libres. Sin embargo el trabajo lógico algo más sistemático comienza con el tratamiento de las clasificaciones dicotómicas. Podemos comenzar con situaciones sugestivas, como por ejemplo, tomando el conjunto de los alumnos de la clase. Es importante que hablemos de ese conjunto «universó» y sólo de ese. Lo podremos clasificar según diferentes criterios pero con la condición de que se puede hacer únicamente dos partes, dos subconjuntos. Las clasificaciones que vayan proponiendo los alumnos se harán realmente. Así, si uno propone como criterio «el vestido» y pretende separar los que van con falda de los que van sin falda, se efectua realmente. Niños-niñas, rubios-morenos, con chandal-sin chandal, siempre es posible fomentar la imaginación.

Las situaciones y materiales usados anteriormente son también válidos ahora. La diferencia estriba en que la consigna los constriñe a formar dos subconjuntos, a precisar el atributo que han tomado como criterio clasificador y a precisar su expresión verbal. Demos a cada alumno un puñado de material diverso: chapas, tapones de plástico, de corcho, y piedrecitas. ¿Como llamar a lo que tiene sobre tu mesa? ¿Que palabras usar para que abarquen la diversidad de esas cosas?

Los alumnos propondrán algun término: «montón», «cosas», «puñado de cosas», o bien, «conjunto». El maestro se encuentra en la tesitura de optar en este momento por la terminología conjuntistas u otra menos precisa.

La consigna en este caso será hacer sólo dos partes y luego iran verbalizando lo que han hecho.

Obsérvese y compárense estas dos expresiones:

«Yo me he fijado en si son duros y he hecho dos montones. El montón de los que son más duros y el montón de los que son menos duros.»

«Yo me he fijado en la forma y he hecho dos subconjuntos: el subconjunto de los que son redondos y el subconjunto de los otros».

Con los materiales citados o con los que existan en el aula se puede, con un poco de imaginación buscar situaciones lúdicas para la ejercitación de las clasificaciones dicotómicas, dando siempre la debida importancia a la precisión en la expresión oral y a la simbolización de la cual trataremos a continuación.

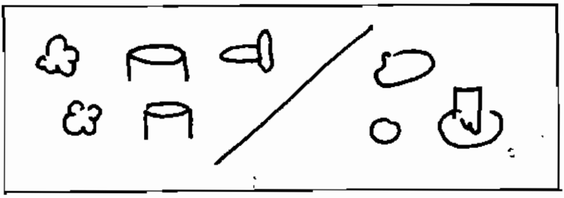
Con las sesiones dedicadas a simbolizar se intenta fundamentalmente ir creando el código necesario que vaya sustituyendo a los elementos y situaciones concretas, procurando la abstracción.

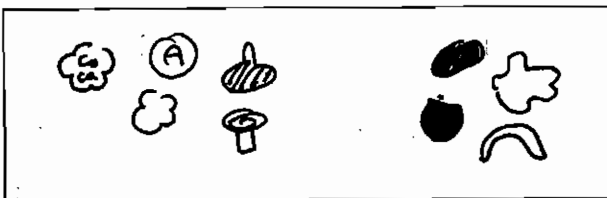
Tengamos, por ejemplo, el mismo material citado unas líneas más arriba y la misma situación. Se trata ahora de lo siguiente: uno, que puede ser el maestro o algún alumno, propone una clasificación; sea, por ejemplo, «cosas que tengan letras y las otras». (Normalmente las chapas y tapones suelen tener inscripciones). Los demás deben efectuarla manualmente y a continuación representar en un papel, «dibujar», lo que han hecho.

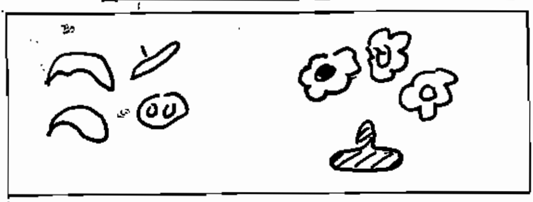
Algunas de las representaciones, voluntariamente o a indicación del maestro, se exponen en el encerado y se someten a la crítica de los demás. ¿Cuál parece más adecuada? ¿Qué significan estos dibujos? ¿Para qué has puesto esta raya, para separar? etc, Poco a poco se van observando defectos y llegando a la mejor manera de representar, a través de sucesivas representaciones, propuestas, debates y votaciones hasta conseguir una única simbolización para todos.

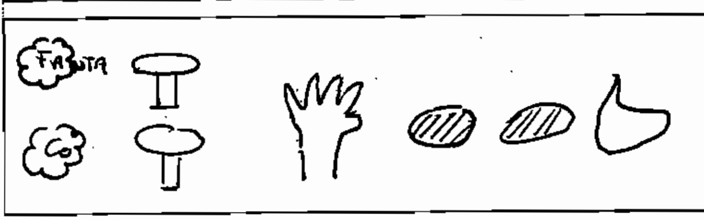
Suele haber tres fases en la evolución de las representaciones.

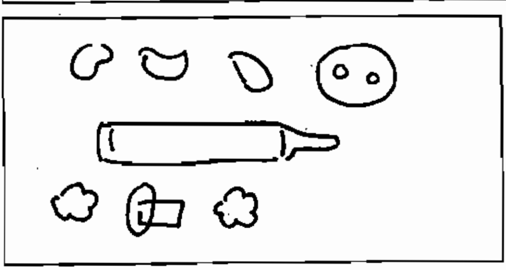
A) Fase inicial, de tipo figurativo, en el que tratan de dibujar-retratar lo que tienen delante. Véanse las siguientes:





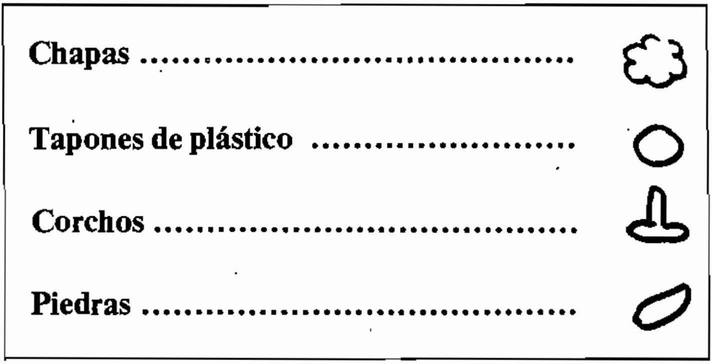




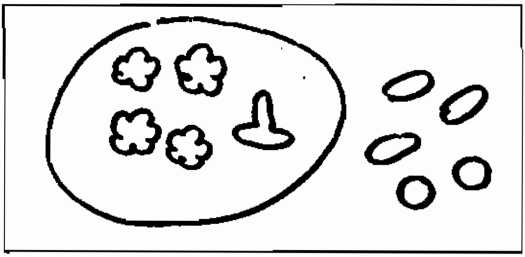


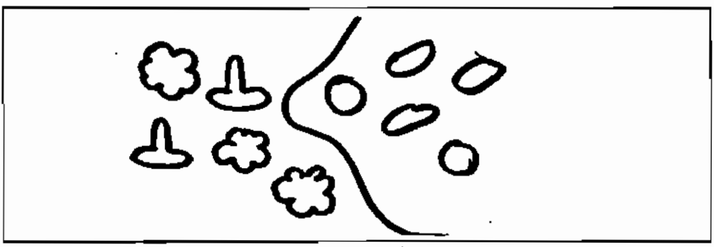
B) Fase semisimbólica, en la que como consecuencia de las discusiones se va viendo como innecesario «dibujar exactamente» las cosas. También surgen líneas indicativas del agrupamiento o la partición. Es entonces cuando parece conveniente ponerse de acuerdo para representar todos de la misma manera. Se proponen los símbolos y se vota.

Como ilustración veamos los símbolos de los alumnos de la misma aula que la ilustración anterior.



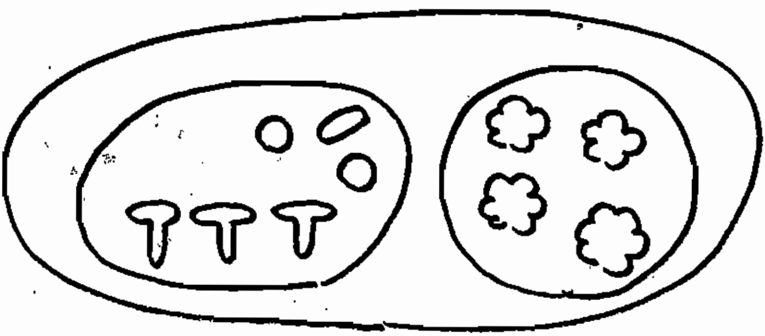
y dos simbolizaciones





C) **Fase simbólica.** Por fin en esta fase se llega al acuerdo de representar con símbolos y los mismos signos (rayas). Las líneas o diagramas no son vistos como muy necesarios por parte de muchos alumnos al principio. A la pregunta de «¿para qué haces esa línea?» se suele responder: «para que se note que están juntos», «para separarlos», «porque sí» y similares. Con sugerencias del maestro puede concluirse en la representación conjuntista estándar. Representación que ya no será ajena a los niños sino que ha ido surgiendo de la propia actividad.

De este modo las representaciones como esta



tienen verdadero significado.

Ciertamente que otra simbología y otra terminología pueden tener la misma validez siempre que se hayan producido por un proceso colectivo de simbolización.

A partir de aquí cabe el trabajo individual mediante fichas preparadas al efecto por el maestro o con ejercicios tomados de los textos.

Los ejercicios individuales ya a nivel sólo gráfico tienen el objetivo de interiorizar plenamente ó construído colectivamente y generalizarlo extendiéndolo a otras situaciones, aunque éstas sean ficticias.

Pero la actividad clasificatoria no adquiere su plena validez hasta que no se alcanza la idea de negación. Si lo hemos pasado por alto hasta ahora ha sido para hacer más sencillo el camino. Sin embargo, el hecho de la negación surge por necesidad de simplificación y expresión verbal.

Volvamos, por ejemplo, a la situación anterior: cada chico tiene un pequeño montón (conjunto) de chapas, tapones de plástico, de corcho y piedrecitas. Tomemos la misma consigna: hacer sólo dos partes (formar dos subconjuntos) observando un criterio. Las expresiones normales primeras son de este tipo:

— «Un montón con los redondos y otro de alargados y chatos y otros».
— «Yo he hecho dos partes: una de las chapas y la otra de las piedras, los corchos y los plásticos».

Suele ser más fácil acotar el primer subconjunto y dificultoso el segundo.

Si retomamos la situación de clasificación de los alumnos encontramos los mismos obstáculos: «En un lado se ponen los que llevan zapatos y en otro los que llevan zapatillas o botas o...»

Podemos proponer que piensen la manera más clara de «explicar la clasificación». Si no surge ninguna apropiada el maestro puede hacer ver que usando la palabra NO la clasificación es más sencilla. De este modo las anteriores expresiones quedarían así:

— Un montón con los redondos y otro de los que no son redondos».
— «Yo he hecho dos partes: una de las chapas y otra de las que no son chapas».
—«En un lado se ponen los que llevan zapatos y en otro los que no llevan».

Es cierto que las expresiones anteriores no son muy correctas pero no podemos pretender que de inmediato se haga uso del NO lógico. la expresión correcta «redondos y no redondos» es muy sintética y ha de ser considerada como expresión terminal. Hay que advertir que desde la expresión espontánea «un montón con los redondos y otro de alargados y chatos y otros» hasta la correcta «redondos, no redondos» media un tiempo de trabajo en el que se va descubriendo que:

a) Los que no son redondos, no lo son porque tienen otras formas.
b) Decir «los que no son redondos» equivale a decir «los que son alargados y chatos y otros».
c) Decir «los que no son redondos» es más fácil porque así quedan indicados todos sin necesidad de especificar cada forma».
d) Por último, la expresión «los que no son redondos» se puede sintetizar con esta obra sinónima: «los no redondos». Y esto último resulta arduo para los alumnos menos dotados.

El trabajo sobre seriaciones y clasificaciones descrito hasta aquí, se hace frecuentemente a nivel de primer curso, de modo paralelo al de construcción del número. Es decir, unas sesiones se dedican a aspectos cualitativos de las cosas y otros a aspectos cuantitativos. La noción de conjunto se desprende directamente de las clasificaciones, pues clasificar viene a ser formar conjuntos, a este nivel. El número es por ahora -así deberemos enfocarlo didácticamente- un nombre ó etiqueta que ponemos a los conjuntos que tienen la misma cantidad.

LA CONSTRUCCION DE LOS PRIMEROS NUMEROS

Normalmente el aprendizaje de los primeros números (los menores de 10) suele hacerse en Preescolar, de modo que la mayoría de los alumnos que empiezan el Ciclo Inicial conocen las grafías y saben contar. Sabemos que eso no significa que posean el concepto de número.

Nos interesa partir de esos conocimientos que ya tienen y cambiar la perspectiva: los números serán cardinales de conjunto, como arriba se ha indicado.

Para aclarar la lectura de las páginas que siguen, no vendría mal matizar qué significa que un niño adquiera el concepto de número. La adquisición de este es de los temas más contravertidos del aprendizaje matemático.

Para empezar precisemos que no todos los matemáticos opinan lo mismo acerca de lo que es el número. Si ya de entrada hay divergencias matemáticas sobre tal concepto, es lícito admitir que hay diferentes posiciones didácticas, puesto que de algún modo cada didáctica pretende apoyarse en una concepción matemática y en una psicología del aprendizaje. Y hay diferentes teorías psicológicas del aprendizaje.

La psicología de la Escuela de Ginebra ha contribuído al debate aportando el punto de vista epistemológico que no entraremos a discutir. Nos encontramos así que el teórico matemático opina sobre el número; el psicólogo y el epistemólogo aportan también sendos puntos de vista. Hay bastantes publicaciones en el mercado sobre este asunto.

Sin embargo, el punto de vista del maestro, del pedagogo, del didacta es otro. El maestro selecciona y asume las aportaciones de matemáticos, psicólogos y pensadores, pero se encuentra en la difícil situación de construir un camino a través de cuyo recorrido los alumnos alcancen esos conceptos de los que hablan los «científicos», lo cual le hace tener forzosamente otra visión sobre el tema; visión que va conformando gracias a las múltiples observaciones que pueden hacer.

Sabemos que en el aprendizaje de los primeros naturales confluyen dos aspectos:

— Uno cuantitativo. Un número indica una cantidad de objetos determinada y recíprocamente una de objetos puede indicarse con un número.
— Otro de orden. Los números están ordenados, un número es un signo que indica una posición, un lugar en una secuencia.

Sabemos igualmente que los niños que no han tenido las experiencias adecuadas para hacer confluir ambos aspectos, confieren al número una entidad de signo, de garabato mágico, sin relación alguna con aquello que representa, confundiendo orden y cantidad. Por eso, las experiencias y ejercicios escolares van dirigidos al aprendizaje simultáneo de ambos aspectos.

Es preferible para el maestro, teniendo en cuenta lo anterior, esquivar la expresión «concepto de número» y hablar de **«comprensión de lo numérico».** Con «comprensión de lo numérico» no nos referimos al problema epistemológico de construcción del número, sino a la visión panorámica escolar de aprendizaje de los números. Este no se detiene en los dígitos, sino que se extiende a la comprensión de nuestro sistema númerico.

Bajo esta perspectiva se ve como necesario plantearnos una estrategia amplia de aprendizaje, que abarque desde los primeros números hasta el total dominio de nuestro sistema de numeración.

Esa estrategia la concentraremos en las fases cíclicas escalonadas siguientes:

1) Los nueve primeros naturales.
2) Las decenas.
3) Las centenas.
4) Millares, etc.

Cada una de las fases se trabajará a nivel didáctico bajo estas tres premisas simultaneamente:

a) Distinguir entre cantidad y número. El número es un signo (5) ó un término (cinco) con el que denominamos a esa cantidad. Tiene una función adjetiva, cardinal. Sobre este primero y fundamental carácter del número se sustenta otro más generalizador, abstracto y no menos importante: Con una única palabra («cinco») designamos a todos los grupos de objetos que tienen la misma cantidad, no necesariamente los mismos objetos. El enfoque conjuntista, bien tratado didácticamente es válido para alcanzar esta abstracción. En resumen: de la función adjetiva y puntual (cinco lápices) hacia la función adjetiva genérica (cinco lápices, niños, estrellas, etc.)

b) Construcción ordenada creciente (n+1) o/y decreciente (n-1) de la secuencia numérica.

c) El aprendizaje del número es operatorio, es decir, no se basa en imágenes gráficas ni en asociaciones mentales sino en:

— composición y descomposición numérica
— equivalencias
— cálculo operatorio

Estimamos como errónea la visión lineal del aprendizaje numérico que es habitual en muchas aulas: «primero que aprendan bien los números (sic); luego a sumar y después a restar». Por el contrario nuestra opinión es que no se consigue un verdadero conocimiento de lo numérico -aún en la primera fase- sino a posteriori de muy diversas experiencias y cálculos operatorios. Sobre ese punto volveremos más adelante.

INICIACION A LA SUMA

Las experiencias previas a cerca de clasificaciones, conjuntos y cardinación conforman la base conceptual sobre la que se puede edificar la operación de sumar. Además, si el trabajo escolar se ha hecho en la perspectiva expuesta en páginas anteriores, los alumnos poseen cierto hábito de representar gráficamente.

La operación ADICION se basa, en el nivel escolar de iniciación matemática del que tratamos, en acciones reales. Las acciones efectivas de unir, juntar, reunir..., son habituales en los niños antes de los seis años. La escuela lo que hace es transformar dichas acciones expresándolas con un código especial. Y es precisamente en la asimilación y uso de ese código donde radica la mayoría de las dificultades que encuentran los escolares.

Es conveniente, en este sentido, que el código para expresar las acciones sea creado colectivamente por el grupo. Al proceso de creación del código llamamos proceso de SIMBOLIZACION (ver parágrafo «simbolización»).

Así pues, iniciaremos la enseñanza de la ADICION a partir de reuniones de conjuntos, objetos, «puñados». Tendremos en cuenta fundamentalmente el aspecto cuantitativo de las acciones que se realicen, al mismo tiempo que la simbolización de esas acciones.

A través de este proceso de simbolización colectiva y cuantificación iremos abstrayendo lo esencial, que quedará plasmado en operar finalmente con los signos creados. Llegaremos de este modo, a operar exclusivamente a nivel simbólico pero siempre teniendo como referencia las acciones que sirvieron de base para la abstracción.

Podremos comenzar con experiencias de reunión de pequeñas cantidades (la suma de ellos siempre inferior a diez). Veamos algunas:

A) Niño, niña. Material discontinuo, por ejemplo, monedas de peseta. Damos a cada uno una cantidad inferior a diez. Papel.

Un niño coge de su mesa una determinada cantidad y se pone en pie. Una niña hace lo mismo. La situación está planteada y el interrogante sera: «cómo sabremos cuántas pesetas tienen entre los dos juntos» o bien, «qué haremos para saber cuántas pesetas tienen entre los dos». Las propuestas no se hacen esperar:

— «Juntamos las pesetas de los dos»
— «Primero las echa ella en un vaso y luego las echa él y las contamos».
— «Se juntan y se cuentan».

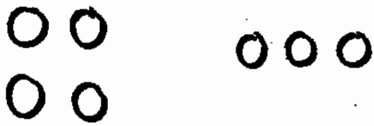
U otras similares.

El niño dirá cuántas tiene y luego lo dirá la niña. Los demás hallarán la respuesta a la pregunta «dibujando».

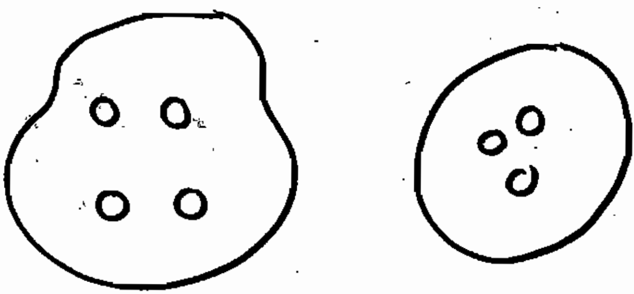
Las representaciones más frecuentes suelen ser de tres tipos:

— *Figurativas. Dibujan realmente al niño y a la niña con sus monedas.*

— *Dibujan las monedas.*



— *Otros recurren al trabajo anterior de conjuntos y utilizan diagramas.*



En esta primera fase están ausentes la representación o símbolo de la acción, la representación del conjunto resultante como tal y la utilización de números.

Si continuamos la experiencia y hacemos notar los detalles que faltan en sus representantes, paulatinamente irán apareciendo otras algo más perfeccionadas.

B) Las manos. Cada alumno tiene chapas, papel y lápiz. las consignas las puede ir dando el maestro pero es más interesante que lo hagan rotativamente los alumnos. Pueden ser de este tipo:

—«En una mano tenemos cinco chapas y en la otra, cuatro. ¿Cuántas chapas en total tenemos?».

—«Con una mano cogemos cinco chapas y con la otra cogemos cuatro. ¿Cuántas chapas hemos cogido?».

En esta experiencia, si se lleva a cabo después de la A, la acción de juntar se vive como evidente y surge la representación de la misma. Entonces el maestro puede indicar a algunos que transcriban su representación en la pizarra para ser vista y discutida por los demás. De este modo iremos avanzando hacia la concreción de un mismo tipo de representación para todos.

C) Unión de conjuntos. Adjuntamos un fragmento de la narración de la experiencia de una maestra:

La idea perseguida al trabajar las cuestiones de la unión de conjuntos no era que los niños «aprendieran» tal operación o que se familiarizaran con el símbolo de la matemática conjuntista. Lejos de ello nuestro objetivo era avanzar en la construcción colectiva de simbolizaciones para ir así construyendo un lenguaje cifrado propio que fuera cristalizando paulatinamente en el lenguaje matemático bajo formulación conjuntista. Así pues se ha centrado el trabajo fundamentalmente en la creación colectiva de las operaciones realizadas con colecciones concretas.

Después de visitar un caserio, al llegar a clase comentamos el tipo de animales que habíamos visto y cuántos de cada clase; cuántos dentro, cuántos fuera... Partiendo de esto planteamos una situación de **unión** *entre los animales de fuera y los de dentro aprovechando que los de fuera entraron en la cuadra, lo cual representaron gráficamente (dibujan una composición incluyendo detalles, personas, otros animales...)*

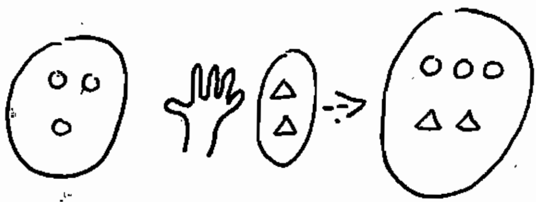
Lo mismo hicimos con las plantas que vimos y recogimos

Dado que esas primeras representaciones más parecen dibujos libres que simbolizaciones matemáticas, lo estuvimos comentando y aprovechamos posteriormente situaciones adecuadas que tienen lugar en clase con caramelos, botones, cromos,...

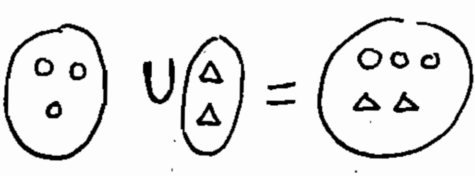
Manipulamos y hacemos uniones con las manos. Recalcamos como muy importante la representación de la acción.

Poco a poco fuimos llegando a representaciones más esquemáticas. Después de una manipulación o una acción, la representaban, algunas las copiabamos en el encerado y elegíamos la más clara.

Perfeccionábamos esa representación buscando símbolos más comprensibles hasta lograr una estructura adecuada de la unión aunque fuera con sus propios símbolos pues por debajo estaba latente el esquema de estado -operador- estado. Esto fue el tipo de representación finalmente aceptada por todos:



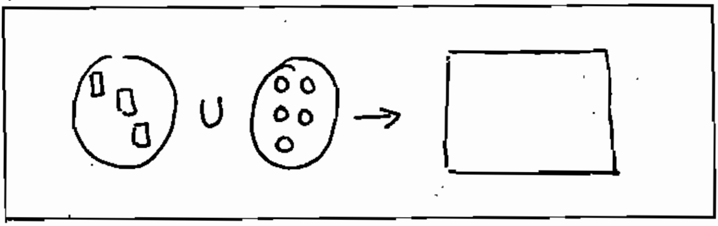
Una vez aceptada y trabajada la representación elegida por ellos era necesario percatarse de que valdría si fuese entendida por los demás. Propuse que vinieran algunos amigos de otra clase de cursos superiores a leer la representación nuestra. Vino uno, no entendía y le explicamos, pero él nos propuso que utilizaramos la que el conocía, la universal. Hicimos lo mismo con varios amigos más y nos fuimos convenciendo de la necesidad de cambiar nuestra simbolización por la que todos entendían:

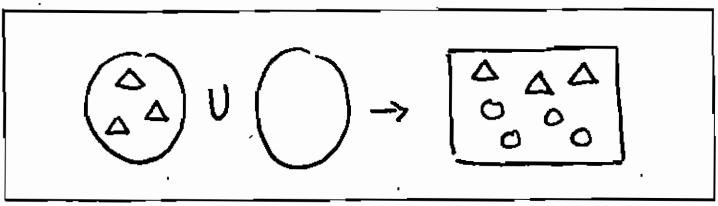


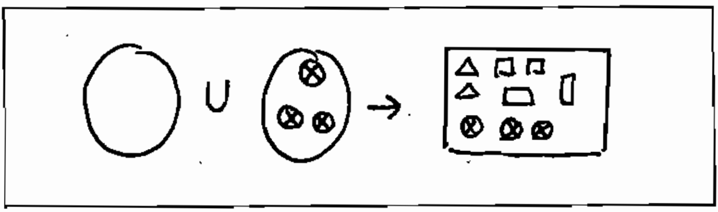
Después de aceptado seguimos trabajando los esquemas a través de historietas, problemas surgidos en clase, acciones mimadas, y continuamos con fichas preparadas para uso personal.

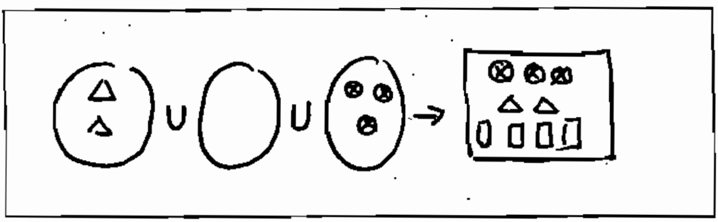
En las fichas hay tres tipos principales de ejercicios:

A) Completa



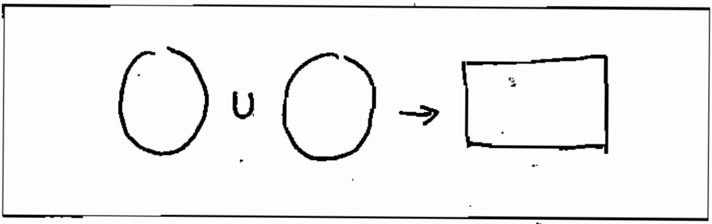


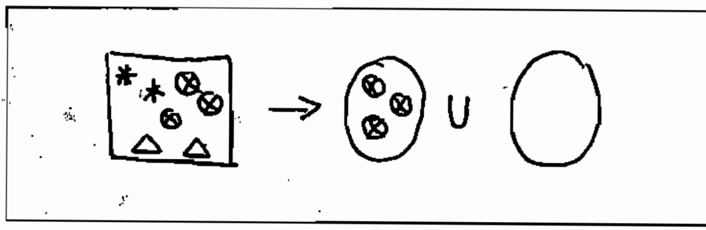


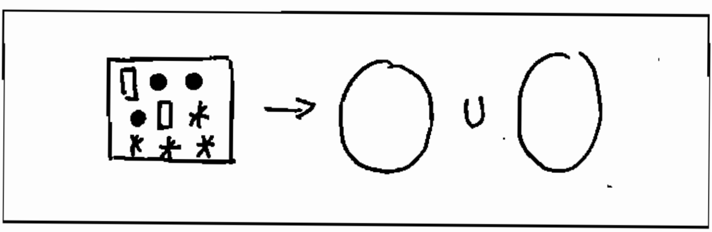


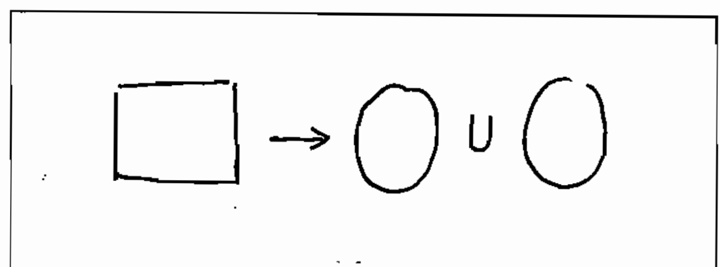
B) Inventa y dibuja tú un problema

C) Completa:









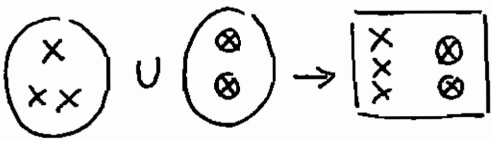
CONSTRUCCION COLECTIVA DEL SIGNO

Para la construcción del signo + y la estructura de la adición me apoyé en los trabajos previos sobre conjuntos.

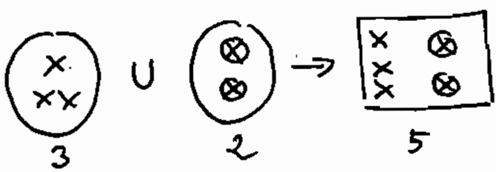
Propuse a los alumnos trabajar con conjuntos poniendo los cardinales. Los pasos genéricos han sido los siguientes:

A) Material discontínuo sobre las mesas (chapas, botones, corchos, o cualquier otro). Coger dos cantidades (indicadas por el maestro) y reunirlas. Representar gráficamente lo realizado.

B) Puesto que el tipo de representación que habitualmente usan es:



Pedí que pusieran los cardinales a cada conjunto, con lo cual llegamos a representaciones del tipo:



c) Por último, escribir sólo números en sucesivas manipulaciones, haciendo notar que el signo U no es válido cuando se usan sólo números. De los distintos tipos de signos propuestos para sustituir a U se seleccionó por notación uno, pero más adelante lo sustituímos por el estandar +.

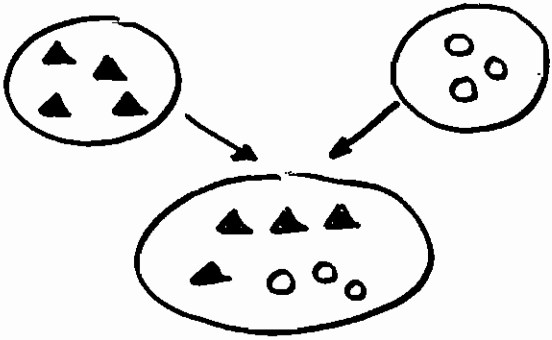
La experiencia contenida en la narración que acabamos de leer, posee aspectos muy polémicos e interesantes:

1) La iniciación a la suma tiene una dificultad esencial. Cuando los alumnos reunen dos conjuntos de objetos del mismo tipo (pesetas con pesetas, chapas con chapas) la expresión verbal de la acción efectuada no ofrece dificultades pues el conjunto resultante se compone del mismo tipo de elementos que los otros dos conjuntos. Sin embargo, cuando los conjuntos a reunir son de material diverso se hace imprescindible buscar un término (concepto) globalizador para expresar lo que compone el conjunto resultante.

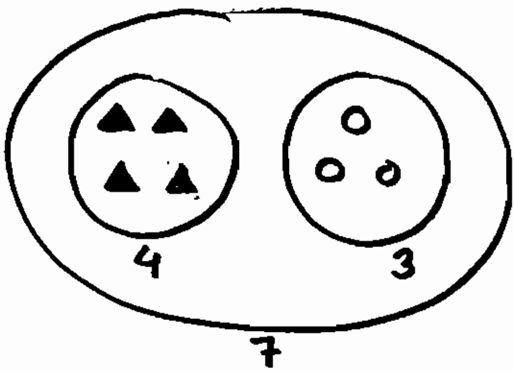
Si reunimos un puñado de tres pesetas con otro de cuatro obtenemos un puñado de siete pesetas evidentemente; pero si juntamos un puñado de tres chapas con un puñado de cuatro corchos (o bien tres niñas con cuatro niños) obtenemos un conjunto de qué ¿de chapas? ¿de corchos?. He ahí una dificultad importante que el trabajo con objeto bajo el enfoque conjuntista logra solventar. Por el contrario, el trabajo prematuro con números solos, oculta este matiz: tres más cuatro nos da siete pero si ello no está referido a la realidad se nos queda en un simple vacío de sentido.

2) la representación de las acciones a la que han llegado no es la conjuntista comunmente aceptada. Si se ha optado por ella ha sido con el fin de que sirviera de base para la operación artitmética, es decir, se ha optado por una representación horizontalmente y seccionada en tres términos como aritmética.

Se podría argumentar que esta otra representación, frecuente en otras aulas, sería más válida. No lo creemos así.



La representación conjuntista normal tiene matices diferenciadores que son positivos cuando esa representación no la impone el maestro pues queda vacía de contenido, sino cuando se provoca su surgimiento en clase.



Entonces el diagrama externo que engloba los dos subconjuntos es indicativo de la acción de reunir. Los defensores de esta representación arguyen que así se ve claramente que el conjunto reunión está formado por dos subconjuntos; que es válida para que los alumnos lleguen a la idea de subconjunto; que ofrece una imagen nítida de las partes y el todo; que es necesario desde el punto de vista del curriculum escolar, pensando que en cursos posteriores los alumnos han de trabajar matemática conjuntista.

Creemos por el contrario, que la representación horizontal secuenciada no contradice ninguno de esos argumentos a la vez que es más positiva por cuanto hace hincapié en el aspecto operatorio (acciones), cosa de mayor importancia que lo meramente perceptivo.

D) «Historias problema»

El trabajo con hechos reales teatralizados o con historias reales o inventadas suele ser más atractivo. Se trata de efectuar una acción ante los alumnos o inventarla; una vez hecha hay que problematizarla (exponer un interrogante); los alumnos deben representarlas y resolver el interrogante planteado. Veamos unas cuantas, que de principio, puede hacer el maestro realmente.

—Tengo en mi mano cinco lápices (los muestro). Pero voy andando y me encuentro aquellos tres (en alguna mesa). Los cojo y me voy a mi sitio ¿cuántos lápices llevo?.

—Voy de paseo y Jesús (un alumno) me dá tres chapas. Sigo y Sonia (una alumna) me regala seis corchos. ¿Cuántas cosas tengo ahora?

En las representaciones algunos alumnos regresan a las de tipo figurativo o semifigurativo. Y a partir de ellas, a través de sucesivas «historias» y convenciones se llega a concluir en la representación aritmética. Las dificultades no estriban en el cálculo pues la mayoría suelen conocer la respuesta al interrogante antes incluso de hacer una representación. Las dificultades están en la representación simbólico-matemático de acciones reales, o imaginadas pero que pueden ser reales.

Las aulas donde han trabajado la unión de conjuntos, como en la narración anterior se ha indicado, tienen gran parte del camino ganado. Los alumnos tardan menos tiempo en usar con rapidez el esquema aritmético.

Cuando los alumnos han captado el modelo de «historias» que el maestro ha realizado, se les puede pedir que quien quiera de ellos haga otras. O bien invente una y la diga a los demás.

Una «historia» es un problema. Inventar un problema es fácil pero estructurarlo, expresarlo bien y plantear el interrogante no es fácil. Evidentemente no se puede resolver un problema si no se comprende su estructura. Lo mejor para comprender problemas es tratar de inventarlos. Por este camino se irá construyendo hasta comprender claramente que todos los problemas se estructuran en tres partes:

A) Juan tiene seis pesetas.
B) Se encuentra tres que había en la calle.
C) Ahora tiene nueve pesetas.

Lo que haya que hacer vendrá determinado por el interrogante planteado. En el ejemplo expuesto hay que unir A con B (sumar seis con tres). Este es un tipo de problema sencillo, lineal e idóneo en los comienzos de la iniciación. Sin embargo es conveniente plantear historias en las que falte B o falte A. Por ejemplo:

—En este bolsillo tengo tres. Lo que tengo en el otro bolsillo no te lo digo. Pero juntando lo que hay en los dos tengo ocho (pesetas, monedas, chicles, etc).

¿Cómo representar con números este problema? No es fácil comprender que su escritura debe ser así:

3 + ... = 8

—«Entre Iñaki y su hermano juntan nueve pesetas. El hermano tiene cinco. Calcula las que tiene Iñaki». Su escritura puede ser:

... + 5 = 9 ó bien 5 + ... = 9 ó bien 9 = 5 + 4

Se puede asegurar que la práctica de representar o inventar problemas, «historias», es de vital importancia tanto para la comprensión de su estructura lingüística como para la generalización de la operación. Hay que reconocer que el signo «+» es, en principio, sustituto de muy diferentes expresiones: «me encontré», «me dieron», «me regalaron», etc. En otras palabras, muchas y muy diferentes expresiones nos llevan a utilizar el signo « + » para resolver los interrogantes que de ellas se desprenden. Por lo tanto es indispensable practicarlas tanto a nivel verbal como real.

EJERCICIOS INDIVIDUALES DE AFIRMACION

Son recomendables los siguientes tipos:

A) Dada una «historia», representarla numéricamente.

B) Dada una expresión numérica, por ejemplo, 3 + 5 = ..., inventar una historia para ella.

C) Ejercicios de cálculo, que tras el trabajo previo, tienen significado:

4 + 3 = ...
5 + ... = 8
... 2 ... = 7

D) Juego de cálculo.

....

Por último quisieramos hacer tres observaciones:

a) Una es la necesidad de que el proceso antes explicado sea lento, aunque la mayor o menor lentitud depende de las individualidades. Ciertamente, tras haber alcanzado el estadio de operar ya a nivel numérico exclusivamente (ejercicios del tipo 3 + ... = 7), los niños recurren a los referentes reales -manipulación de material y acciones-, para resolver el ejercicio planteado. Hay con frecuencia, ante una dificultad, una vuelta a pasos anteriores que se saldan con otros hacia adelante. Y ello no parece conveniente forzarlo. La agilidad en la resolución de ejercicios parece basarse en la comprensión que a ello aporta un proceso de simbolización firme.

b) Otra, que la expresión numérica aditiva es vista en este estadio como expresión narrativa: es efectivamente, la transcripción de una acción o suceso ocurrido o que puede ocurrir. De ese modo, el nexo entre lo real o manipulable y lo simbólico ó ficticio queda alcanzado.

c) La simbolización de la suma es sólo el inicio de la operación la entrada en el campo operatorio. De ello no se puede deducir que los alumnos conozcan los números, (todo lo hecho hasta aquí ha sido con números menores de diez) ni que saben sumar. La construcción de la suma no se consigue hasta que se simbolicen un cierto grupo de acciones, algunas de ellas de carácter inverso a las aditivas, denominadas con el término RESTA.

Por eso, es aconsejable que antes de ampliar el campo númerico construyendo las decenas, y antes de iniciar la suma con números de dos cifras, emprendamos la iniciación a la RESTA. El modo dé hacerlo se tratará en el capítulo dedicado a la RESTA.

PROFUNDIZACION

El progresivo afianzamiento en las operaciones de adición y sustración con números anteriores a la decena, las experiencias globales de larga duración desarrolladas en clase del tipo de las del calendario y el crecimiento de las plantas, nuevas situaciones y experiencias que surgen de la propia dinámica de clase y estímulos familiares, van provocando la necesidad y la curiosidad por ampliar el campo de operaciones y operar con números de diez. Para resolver situaciones apoyándose en números de dos cifras es condición indispensable, creemos, el tratamiento sistemático y ordenado de dos puntos:

A) Conocimiento de nuestro sistema númerico (cardinación) y construcción-ejercitación de la recta numérica (ordenación).

B) Las técnicas operatorias.

A.1 LAS DECENAS

La ampliación del ampo numérico posee un difícil y muy importante escollo: la construcción de la decena, concepto este que es clave para el conocimiento y uso de nuestro sistema de numeración. Hemos optado por tratarlo desde la perspectiva de cardinación y experimentalmente, es decir, realizando agrupamientos y dando un nombre a cada uno de ellos. El material preferible es discontinuo y propio del ambiente: chapas, garbanzos, chinas, botones, palitos de polo, etc., en un primer momento. El trabajo posterior con material estructurado agiliza el cálculo.

Preparamos material y algo que sirva de recipiente, por ejemplo, garbanzos y vasitos de yogur. Cada alumno dispondrá de una cantidad apropiada de ellos, papel y lápiz. Comencemos agrupando bajo consigna.

1. Cada uno toma un conjunto de siete garbanzos. La consigna será «añadir uno». Lo hacen e interrogamos: «¿Cómo llamamos a ese conjunto?». «Añadir uno más». «¿Qué nombre dar a ese nuevo montón?, ¿ Cómo representarlo con números?».

Convendremos en que cuando tengamos nueve y uno más los meteremos en un vaso. A ese conjunto llamaremos «decena» ó también «diez», y lo designaremos con 1 y un O: un vaso (1) y ningún garbanzo suelto (O). Hecha esta convención (lo que no quiere decir que ya se tenga el concepto de decena) podremos a experiencias de agrupamientos.

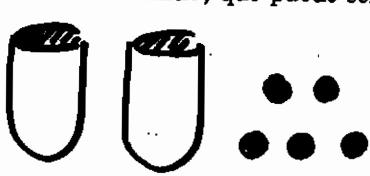
2. Cada uno ha de contar la cantidad de garbanzos que posee respetando la norma siguiente: «cuando tengamos diez los metemos en un vaso». Después iran uno a uno expresando lo que tienen «dos vasos (decenas) y tres sueltos» «tres decenas y cuatro sueltos», etc., y escribiéndolo con cifras.

3. Deshacen el agrupamiento que cada uno había hecho y rotan un puesto. Así se encuentran con otra cantidad de garbanzos que deberán contar de la misma manera: agrupamientos, expresión verbal, escritura.

   Habrá que ponerse de acuerdo en cómo escribir: dónde colocar la cifra de las decenas, dónde la de los sueltos.

4. Conviene practicar este tipo de ejercicios, y si cambiamos los garbanzos por otro material, por ejemplo, chapas, mantendremos el interés.

5. El ejercicio inverso es importante. El maestro escribe en la pizarra un número. Los alumnos cogen la cantidad representada por ese número y la colocan. Así, si el maestro escribe 25, los alumnos colocarán en sus mesas el material, según el modo convenido, que puede ser:



que coincide con el orden de las cifras.

6. *Los nombres de los números.* Las experiencias anteriores tienen entre otros objetivos, el de unir la cantidad de elementos con su representación numérica. El número es por ahora cardinal, y se compone de dos signos, cada uno de ellos con significado propio.

   Pero los cardinales tienen sus nombres que habrá que aprender. Para ello podemos ir construyéndolos de uno en uno. Cada alumno toma nueve elementos, iremos dando la consigna: «añadir uno». Lo harán, dispondrán el material, lo escribirán e iran memorizando sus nombres: once, doce, etc.

   Tan importante es que memoricen a nivel verbal la tira númerica ordenada, como que asocien cada número (palabra) con la cantidad a la que hace referencia. Aún más, en esta fase, no basta con asociar palabras (veintidós) con la cantidad de objetos, sino también con la forma de agruparlos (dos decenas (vasos) y dos sueltos) y con su escritura: 22

7. Las experiencias de construcción manipulativa ganarán en eficacia si se efectúan por etapas (hasta 20, hasta 40..) y si se hace hincapié en el valor de posición de las cifras. El nivel de los alumnos irá indicando al maestro cuando deberá compaginar experiencias con objetos, con ejercicios individuales numéricos.

Los ejercicios tradicionales siguientes son apropiados en esta fase (trabajo individual):

— Escribir los números en orden creciente de uno en uno, de dos en dos, etc.

— Escribirlos en orden decreciente.

— Dado un conjunto de números, ordenarlos de menor a mayor o de mayor a menor.

— Ir ampliando estos ejercicios hasta llegar a cien.

— Descomposiciones numéricas:

$23 = 20 + 30$

23 = dos decenas (vasos) y cinco unidades (sueltos).

— Composición numérica simple:

23 = 20 + 3
34 = ... + 4

8. Material estructurado. El mejor es el que está elaborado siguiendo el modelo del material multibase de Dienes: la unidad es un cubo de 1 cm., la decena es una barrita de 10 cm. de longitud, la centena una placa cuadrada de 10 x 10, etc.

Ese material u otro similar ofrece las ventajas de dar mayor rapidez a manipulaciones como las citadas antes, ser un buen soporte físico de lo numérico y agilizar el cálculo.

Para terminar este apartado haremos una observación:

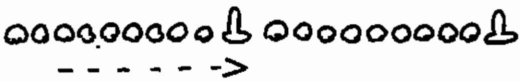
Es indispensable una buena experiencia matemática real de agrupamientos. El material de vasos y garbanzos se cita como indicativo; cualquier otro similar puede ser válido: cajas de cerillas y cerillas, bolsitas de plástico y botones, palillos de polo y gomitas para atar el conjunto de diez, etc. Lo importante no es el material en sí sino el sentido de la experiencia que hagamos con él.

A.2) LA RECTA NUMERICA.

Llamamos recta numérica a la ordenación de los números. Hay varias experiencias y juegos interesantes.

1. Podemos practicar la construcción de la recta con materiales sobre el suelo. Tomemos por ejemplo chapas y corchos. Iremos colocando chapas en el suelo ordenadas por filas. Los lugares décimo, vigésimo, etc, es decir, las decenas, las representaremos con corchos. No es positivo llegar la primera vez hasta 100.

   El nivel de la clase marcará hasta donde se puede llegar.



Con la recta materializada podremos introducir juegos calculatorios.

2. Construcción de la recta sobre tiras de papel similares a las reglas de un metro existentes en todas las escuelas.
3. En algunas aulas es costumbre colocar una gran banda de papel con los números escritos.

Manipular agrupando y representar numéricamente, y viceversa, construir con materiales un número dado, es el movimiento de ida y vuelta que va, mediante tanteo, posibilitando que cada individuo vaya construyendo «su propia recta numérica», lo cual se ve reforzado con diferentes y constantes ejercicios a nivel individual.

El aprendizaje de los 100 primeros números naturales va acompañado indiscutiblemente de una imagen mental personal de los números. Esa imagen mental sirve de apoyo para el cálculo y la resolución de problemas; pues bien, un aprendizaje completo de ello se consigue a medida que el campo numérico se va convirtiendo en campo operatorio; en otras palabras, sólo operando con números se consigue su verdadera comprensión, de lo cual trataremos más adelante.

La experiencia de años anteriores nos ha llevado ha considerar seriamente la posibilidad de utilizar simultaneamente otras «bases» de numeración así como también adentrarse en el conocimiento del sistema numérico partiendo de «bases» diferentes a la «10». Diversas razones nos condujeron a considerar la necesidad de trabajar diferentes «bases», pero en un nivel algo avanzado.

B) OPERAR CON NUMEROS DE DOS CIFRAS «SUMA CON LLEVADAS».

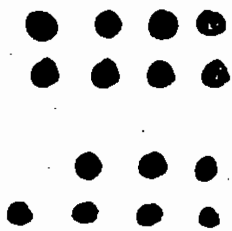
En las aulas donde se llevan a cabo experiencias de larga duración: seguimiento del crecimiento de las plantas, cuidado y observación de animales, etc.., es normal que aparezcan situaciones que para resolverlas haya que sumar números de dos cifras, lo que puede ser aprovechado por el maestro para iniciar la suma con llevadas. En otras aulas es la correspondencia escolar o la cooperativa de la clase el detonante de la suma con números «grandes». En otras, en fin, es el hábito de inventar problemas o la propia dinámica de la clase la que conduce a buscar una técnica operatoria para resolver situaciones.

Sea como fuere, el aprendizaje de la técnica debe ser tratado de modo sistemático, yendo siempre de situaciones fáciles a otras más complejas. Trabajaremos primero a nivel manipulativo exclusivamente, después a nivel manipulativo y numérico, para concluir operando sólo con números y ejercitando el cálculo mental. Utilizaremos el mismo material: vasos y garbanzos, en nuestro caso.

ETAPAS

A) Formación de la decena

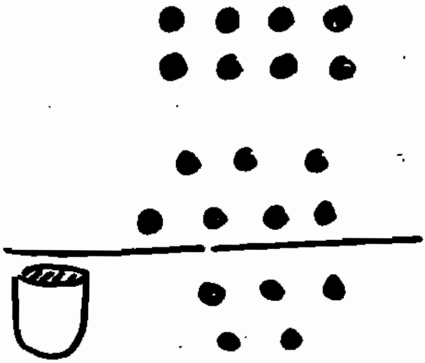
Sea una suma del tipo 8 + 7, 9 + 8, 7 + 6, ... es decir, números de una cifra cuya suma es superior a 10. Cada alumno dispone de material necesario. Tomemos como ejemplo 8 + 7: Colocamos el material sobre la mesa de la siguiente forma:



Trazamos una línea debajo para juntar, con las manos, los elementos y colocarlos debajo de la línea. Una vez juntados se cuentan.

Como los alumnos ya saben que cada diez forman una decena, los meten en un vaso colocándolos a la izquierda, en el lugar de los vasos.

La suma queda así sobre la mesa:



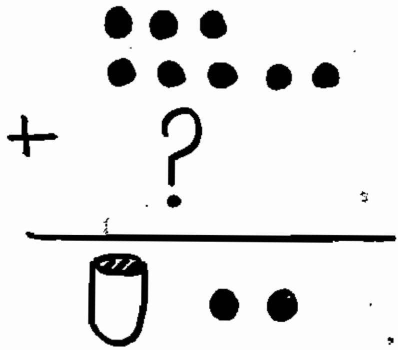
Seguramente habrá alumnos que averigüen el resultado de la suma antes de efectuarla con el material, porque la hayan hecho mentalmente apoyándose en los dedos y en la tira mental numérica. No importa. El objetivo de manipular estas sencillas sumas es el de insistir en la estructura del sistema de numeración. No es lo mismo que los alumnos comprueben experimentalmente que al unir ocho unidades con siete obtenemos una decena y cinco unidades (la decena, para el lugar de las decenas) que evitar la experiencia para memorizar aquello de «de quince me llevo una», ¿Una qué?.

En esta etapa podemos practicar algunos ejercicios interesantes a cualquiera de los tres niveles antes dichos (manipulativo, manipulativo y numérico, numérico sólo) según nos indique el ritmo de aprendizaje de los niños:

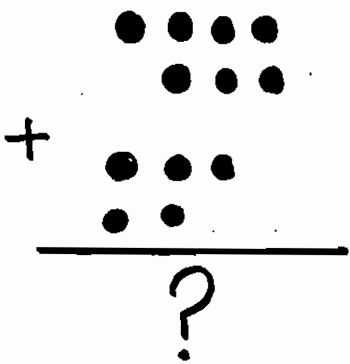
a) Uno inventa un problema. Los demás lo resuelven operando con material.

b) Sumas en las que falten uno de los tres datos:

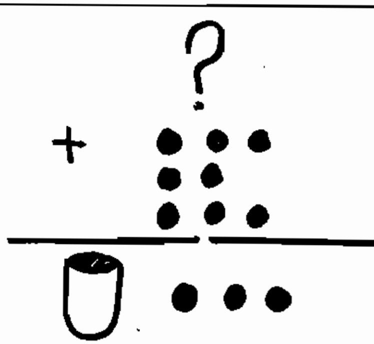
b1)



b2)



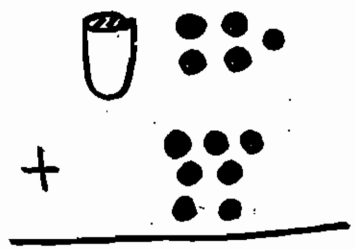
b3)



c) Ejercicios de cálculo mental.

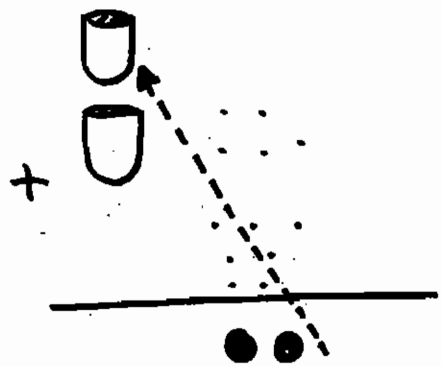
B) Uno de los sumandos tiene decenas. Son sumas del tipo 18 + 4, 15 + 7, 26 + 5. Tomemos, por ejemplo, 15 + 7. Se colocará el material como antes indicamos.

1.°



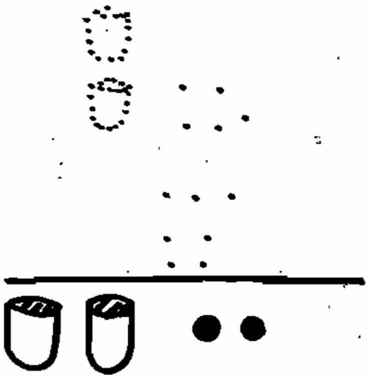
Primero se reunen los sueltos y transportan debajo de la línea. Obtendremos una decena nueva, la cual llevaremos arriba con la otra decena dejando en el lugar de los sueltos los dos que nos han quedado.

2.°

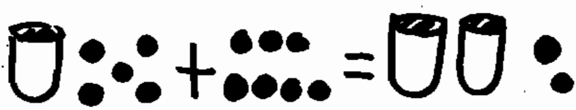


Por último uniremos la decena obtenida con la que teníamos anteriormente y las llevaremos debajo de la línea.

3.°



En efecto, lo que hacemos normalmente cuando sumamos con números es un trasunto de lo que hacemos con el material manualmente. Esa es la razón de haber escogido el sentido vertical. El sentido horizontal es algo más complicado. Véase como sería:



C) Los dos sumandos tienen decenas

Sean números como 23 + 21, 32 + 20, etc procurando, en un primer momento, que no se llegue a la centena. El modelo de operar es el mismo y caben ejercicios como los ya citados. Pero, con seguridad, en esta etapa ya hay bastantes alumnos que han comprendido el mecanismo y no necesitan el material.

D) Material estructurado

El trabajo con este material se realiza como con el no estructurado y supone un paso intermedio que ayuda a pasar de lo estrictamente concreto a lo numérico.

E) Estrategias de cálculo

Cuando llegamos a la ejercitación del cálculo mental observamos que no todos los alumnos operan de la misma forma. Veámoslo en un par de ejemplos: 18 + 5 y 30 + 20 .

1) 18 + 5. Las estrategias más frecuentes son:

a) Apoyarse en la imagen mental de la recta numérica y en los dedos. Se situan en el puesto 18 y, tocándose los dedos, continuan diecinueve, veinte, veintiuno..., hasta veintitrés.

b) Toman la decena como barrera (en este caso el veinte) y descomponen cinco: «dieciocho y dos veinte y tres que me quedan, veintitrés».

c) Reproducen la imágen gráfica del algoritmo:

$$\begin{array}{r} 18 \\ +\ \ 5 \\ \hline \end{array}$$

Y verbalizan: ocho y cinco trece, dejo los tres y la decena la llevo con la otra y tengo veintitrés.

2) Veamos ahora 30 + 20

a) Se apoyan en la imagen mental de la recta numérica y desde 30 saltan dos decenas más llegando a 50.

b) El algoritmo. Colocan mentalmente un número debajo de otro y operan.

c) Se apoyan en la imagen del material estructurado. «Tres barras y dos barras como no hay sueltos, pues cincuenta».

Las estrategias citadas son las constatadas como más frecuentes. Hemos encontrado otras bastante más complicadas así como niños que calculan bien mentalmente pero son incapaces de verbalizar con cierta claridad lo que «hacen con su cabeza».

La didáctica que intentamos construir, por su propia concepción y naturaleza, se opone a la homogeneización, al saber dogmático y expositivo, a la imposición forzada de un modelo operatorio. Antes bien, trata de favorecer la diversidad, la estrategia creativa, la búsqueda personal. Y esto aun es el terreno estricto del cálculo mental.

RESUMEN

Hemos intentado describir el largo camino del aprendizaje de la suma. Normalmente se le dedica dos cursos escolares. Tratemos ahora de resumir las etapas principales de ese camino.

1) **Iniciación.** La suma se ve como una transcripción simbólica de una acción o de una «historia». La expresión aritmética es puramente narrativa. En esta etapa podemos decir que la operación es una acción interiorizada y que toda expresión aritmética, 4 + 5 por ejemplo, es una expresión narrativa.

Coincide esta etapa con la comprensión de los primeros números, conceptos como el de conjunto y entrada en el campo del lenguaje matemático.

2) **Extensión.** El tratamiento continuado sobre acciones, problemas y situaciones conduce al fenómeno generalizador consistente en traducir diferentes expresiones («me encontré», «me regalaron», etc) al mismo esquema simbólico. Simultaneamente se asimila la estructura tripartita de todo problema y la operación inversa, la resta.

3) **La operación es una herramienta.** el avance progresivo en la extensión de la operación, en el campo numérico (decenas, centenas) y en la técnica operatoria van posibilitando un paulativo alejamiento de la realidad. La suma deja de percibirse como un sencilla traducción de un hecho. Ante un problema o situación de números de dos ó tres cifras la búsqueda del resultado lleva a utilizar la suma no para representar el problema sino para resolverlo.

La SUMA se convierte en un arma que sirve para resolver cierto tipo de problemas, en un esquema o modo de operar para hallar soluciones. De este modo la SUMA, llega, al final del proceso, a ser una operación aritmética.

IV b

Resta

I - LA OPERACION

La resta nos parece la operación matemática cuyo aprendizaje ofrece mayor complejidad y dificultad. Cierto es que los programas oficiales vigentes consideran los dos cursos del Ciclo Inicial como tiempo suficiente para ello, pero la experiencia muestra que la mayor parte de los alumnos es en el Ciclo Medio (8 hasta 11 años) cuando la asimilan, la aprenden, convirtiéndola en realmente operatoria.

Quizá sea conveniente, antes de entrar en la didáctica de la operación en las páginas siguientes, recordar una distinción ciertamente banal para la mayoría de los maestros, pero que olvidamos con frecuencia: no es lo mismo algoritmo que operación. El algoritmo, truco numérico o técnica calculatoria de la sustración, sea el «austriaco», sea el «de bases», no ofrece mayores dificultades para su aprendizaje y está al alcance de niños de 7 a 8 años. Sin embargo, la operación, entendido este término como esquema matemático de acción o bien como modelo de razonamiento matemático mediante el cual se resuelve cierto problema o cierta situación, es más difícil de construir o aprender; precisa de unos conceptos y unos razonamientos que más adelante los indicaremos, lo que hace que sea en el Ciclo Medio cuando su aprendizaje es real.

Es demasiado frecuente en la escuela ver cómo niños que saben hacer perfectamente cuentas de restar colocados ante determinados problemas o situaciones para cuya resolución han de aplicar la sustración, son incapaces de hacerlo e incluso, a menudo, dan soluciones disparatadas.

Por eso la didactica que propugnamos sobre el tema está basada en la resolución de problemas y situaciones ocupando un segundo plano la importancia dedicada a las cuentas.

Además de la distinción entre algoritmo y operación matemática es preciso tener presente otra distinción: la operación como descripción de una acción o suceso y la operación sustracción como herramienta utilizable para hallar soluciones a un problema.

Hechas las dos distinciones anteriores se comprenderá que la RESTA ofrece grandes dificultades tanto a los alumnos como a los maestros.

Sin embargo, el escollo mayor con que nos encontramos en la didáctica de la RESTA estriba en que acciones, problemas y situaciones muy diversos entre sí se resuelven aritméticamente con la misma operación. Para mayor claridad vamos a hacer una relación de los problemas tipo más frecuentes en la escuela:

1) Juan tenía 9 cromos y se le perdieron 4 ¿Cuántos le quedan?.

La acción «se le perdieron» es sustituible por «le robaron», «se le cayeron» y similares.

2) a. «Juan tenía 8 cromos. Estuvo jugando y ahora le quedan sólo 3. ¿Qué pasó? ¿Cuántos perdió?.

b. O bien este otro: «Juan tenía 2 cromos; ha estado jugando y ahora tiene 9 ¿Qué ha pasado? ¿Cuántos ha ganado?».

Las diferencias entre los problemas del tipo 1 y los del tipo 2 son notables. En los del tipo 1 hay un conjunto inicial que es el total, al cual se le sustrae un subconjunto quedando otro subconjunto. Son los problemas más elementales puesto que viene indicado el conjunto inicial y el operador («quitar 4»), verdadero trasunto de la acción real. Por el contrario, en los del tipo 2, hay un conjunto inicial y un subconjunto (b) o resultado final (caso a) al tiempo que se omite el operador. Las estrategias que utilizan los chicos en la resolución de problemas de este segundo tipo son muy variadas. De ello se hablará más adelante. Por ahora basta con consignar que la escritura artitmética de los problemas anteriores sería:

Tipo 1

9 - 4 = ...

Tipo 2

a) 8 - ... = 3
b) 2 + ... = 9

Hemos constatado que la solución de los problemas del segundo tipo se va haciendo posible a medida que conseguimos que el razonamiento de los niños se vaya haciendo reversible.

3) a. Juan tiene 2 cromos y Pedro tiene 9. ¿Cuántos más tiene Pedro que Juan? o bien, ¿Cuántos cromos tiene menos que Pedro?. O bien ¿cuántos cromos le faltan a Juan para tener como Pedro?.

b. Juan mide 130 cm. y Pedro 145 cm. Aquí caben interrogantes similares a las anteriores.

Los problemas de este tercer tipo se caracterizan por consistir en una comparación entre dos cantidades, dos conjuntos o dos magnitudes.

Y en ellos radica su diferencia con los de los tipos anteriores. En los del tipo 1 y 2 hay siempre un conjunto dado y se trata de hallar algún subconjunto de él. Por el contrario, en los del tipo 3 hay dados dos conjuntos y tenemos que hallar la diferencia numérica entre ambos.

Tradicionalmente en la escuela ha habido dos tratamientos didácticos de la resta. Uno consistía en una presentación como operación inversa de la adición y su enseñanza quedaba reducida a la realización de cuentas. El otro consistía en la enseñanza directa de la misma sobre ejemplos-problema del tipo I seguido de la ejercitación en las cuentas retrasando la verdadera comprensión de la operación hasta el aprendizaje de las ecuaciones.

En la didáctica que aquí exponemos descartamos ambos enfoques y optamos por uno inverso a los anteriores: Partimos siempre de experiencias, situaciones o problemas concretos; iremos colectivamente concretando las simbolizaciones de tales problemas hasta llegar a la netamente aritmética; acompañada de su expresión verbal correcta; simultaneamente iremos, mediante la manipulación de materiales construyendo el algoritmo y ejercitándonos en él.

Optaremos por un enfoque global en el sentido de no aislar el trabajo sobre esta operación de otras experiencias matemáticas (conjuntos, clasificaciones, sumas, cálculos numéricos, y ampliación del campo numérico) sino intercalando unas experiencias con otras y yendo progresivamente avanzando como indique el nivel de la clase.

La operación sustración viene a ser construída por los individuos sobre la base de conceptos y razonamientos previamente adquiridos. No es posible ya a tenor de las investigaciones en psicología de los últimos años considerarla como algo aislado sino formando estructuras operatorias de conjunto por lo que su enseñanza-aprendizaje no puede ser aislada.

Desde el punto de vista didáctico nos interesaría no sólo desbrozar los conceptos y razonamientos sobre los que se asienta la resta sino también los contenidos escolares y las experiencias que hacen posible su aprendizaje.

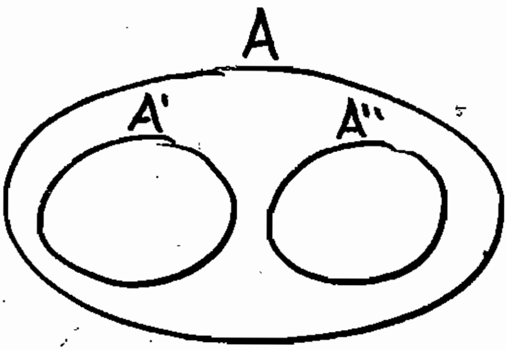
Lo intentaremos. Para ello vamos a reagrupar los tres tipos de problemas antes mencionados en dos solamente. Los tipos uno y dos los agruparemos en uno sólo que llamaremos RESTA A; a los del tipo tres los denominaremos RESTA B.

RESTA A

Como ya dijimos se caracteriza a nivel concreto, por tener que hallar una de las dos subpartes del conjunto total. A nivel de cálculo numérico las estrategias más usadas son:

—Descender en la recta numérica (tipo 1).
—Ascender en la recta numérica (tipo 2).

A nivel gráfico utilizando diagramas de Venn puede tener esta visualización:



A nivel lógico para la comprensión de este tipo de problemas es condición sine qua non el tener en cuenta simultaneamente el todo y las partes. Lo cual, obviamente, no se consigue en uno o dos meses de actividad escolar dedicada a la resta. Es preciso trabajar con anterioridad o simultaneamente lo siguiente:

a) CLASIFICACIONES, sobre todo la NEGACION en clasificaciones dicotómicas.
b) CONJUNTO REFERENCIAL O UNIVERSAL.
c) SUBCONJUNTO.
d) CONJUNTO COMPLEMENTARIO.
No es lo importante la terminología específicamente conjuntista, que puede ser obviada, sino las experiencias que realizan los alumnos, tendentes a construir esos conceptos.
e) SISTEMA NUMERICO DE BASE 10
f) ESCRITURA ARITMETICA del tipo: 8 + ... = 14 (Ver lo dicho al respecto en el capítulo de la SUMA).

La metodología de trabajo en las experiencias sobre los puntos anteriores es la habitual dando importancia a la representación gráfica, a la verbalización y al juego constante sobre estos tres razonamientos:

A + B = C (Dos partes, A y B, forman un todo, C)
C - A = B
C - B = A

O bien:

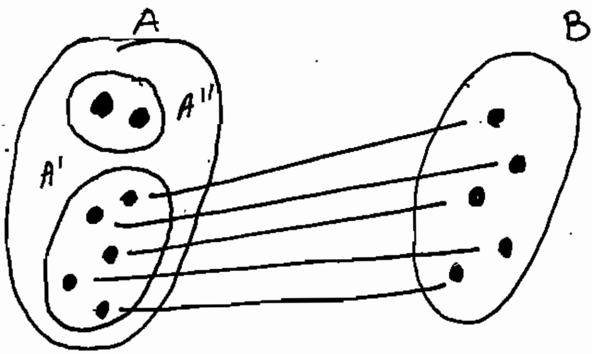
A' + A'' = A
A - A' = A''
A - A'' = A'

RESTA B

Como ya quedó dicho la característica común de los problemas del tipo 3 es, a nivel concreto, establecer una comparación entre dos cantidades, dos colecciones de objetos, dos magnitudes o dos números.

Dados dos conjuntos parece ser que la estrategia más común es establecer una correspondencia entre los elementos del conjunto menor y los del mayor, obteniendo así el subconjunto de elementos que constituye la diferencia.

De cualquier modo, siempre se produce una partición en el conjunto mayor: dos partes, una equivalente al conjunto menor y la otra sería el conjunto diferencia. Su representación gráfica podría ser:



En la resta tipo B, pues, a la dificultad de considerar simultaneamente el todo y las partes se añade otra más: comparar ese todo y sus partes con otro conjunto menor.

La construcción de este tipo de resta requiere trabajar:

— Los conceptos de MAYOR QUE, MENOR QUE Y TANTOS COMO...

— CONJUNTO DIFERENCIA

— EXPERIENCIAS VARIADAS SOBRE COMPARACION DE CANTIDADES.

Por curiosidad intelectual podemos preguntarnos cómo es que tan variados razonamientos y problemas tan diferentes unos de otros tienen un mismo tipo de representación aritmética. Y en forma de ecuación además.

Dejando a un lado esa curiosidad y retornando a la didáctica convendremos, seguramente, en que ambos tipos de problemas de restar vienen a confluir, a medida que va progresando el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos, en un único tipo de resta: la aritmética, es decir, la sustracción como operación inversa de la adición. Podemos así describir el aprendizaje de la resta como un largo proceso que se inicia en sencillas situaciones problematizadas, en manipulaciones idóneas, de material, (de las que ya hablaremos), que aparentemente no tienen nada que ver con la resta; que dichos conceptos y razonamientos se van interiorizando mediante un trabajo continuado de simbolización; y poco a poco las manipulaciones y situaciones reales van cristalizando en un esquema operatorio que se aleja de la realidad, de la que nació; un esquema de razonamiento que se apoya en números y otros signos y que por su carácter abstracto es válido para todas aquellas diferentes situaciones. La resta, construída de este modo, viene a convertirse en una herramienta al servicio del pensamiento, es decir, en operación aritmética.

II. SU DIDACTICA

INICIACION A LA RESTA

Dada la dinámica abierta y, en lo posible, globalizadora que intentamos en clase, las situaciones cuya resolución precisa de la resta, aparecen con frecuencia antes de que los alumnos posean las herramientas numéricas y operatorias necesarias para resolverlas. No obstante no eludimos la solución de esas situaciones.

Sin embargo, la resta necesita ser tratada sistemáticamente, simbolizándola con el mismo esquema metodológico que la suma, inmediatamente después de la asimilación del esquema operatorio aditivo y con números menores de 10.

Sirva de ejemplo ilustrativo el modo de trabajo de una clase de seis años a finales del primer trimestre.

La situación que se planteó fué la siguiente:

Javi había traído 5 caramelos pero en el recreo se había comido 2. ¿Cuántos tenía ahora?. Lo calcularon mentalmente. Pero después cada uno hubo de inventar una historia similar. Todos escenificaron su historia, bien con material, bien con otros niños. Por ejemplo, uno planteó una historia de vaqueros; eran 6 vaqueros pero 2 murieron en un tiroteo con los indios; ¿Cuántos quedaron? (escenificado)

Luego se propuso que cada uno dibujase su historia, pero con números. Al hacerla vimos que faltaba algo que nos indicase la acción de quitar, perder...

Propusieron varios símbolos, entre ellos el convencional «-» que alguno conocía de haberlo visto en casa. Se votó y elegimos el «-».

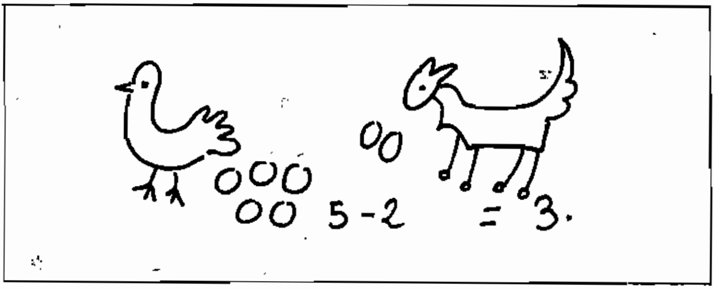
Algunos niños querían comprobar si ese símbolo lo conocían otros niños mayores que ellos y llamamos a niños de otras clases.

Al símbolo «-» le dimos el significado genérico de «quitar».

Aprovechando las distintas situaciones de la clase (plantas que se iban secando, renacuajos muertos, lapiceros que se habían quedado pequeños y ya no podíamos utilizar,...) las escribiamos y calculábamos con números.

El trabajo de ejercicios individuales de afianzamiento es similar al realizado con la adición.

Adjunto una ilustración en la que se aprecia una «historia» de los primeros niveles: el zorro se comió dos de los cinco huevos que puso la gallina.



Esta narración tan breve requiere algunos comentarios. Antes de hacerlos reseñemos que estos alumnos habían trabajado justamente antes la suma con el mismo método por lo que tenían cierto hábito de proponer, simbolizar y votar los símbolos.

1) Comienza el trabajo sistemático de la resta a partir de una situación real, que ella problematiza y reorienta.
2) Provoca o sugiere otras situaciones reales o inventadas pero concretas y similares a la primera. Aprovecha el movimiento y diversos materiales.
3) Pasa, a continuación a la representación gráfica de las situaciones. Ya sabemos -véase el capítulo de la SUMA-que dichas representaciones comienzan siendo figurativas y que progresivamente van siendo depuradas hasta llegar a la representación de tipo aritmético.
4) No ha utilizado representación conjuntista sino que a partir de las representaciones espontáneas ha ido hacia la notación aritmética.

Una vez simbolizadas la suma y la resta es conveniente simultanear el trabajo sobre ambas operaciones durante el resto del curso.

Nos parece de la mayor importancia la expresión oral de las acciones o problemas, sobre todo porque ello posibilita la toma de conciencia de las tres partes simbolizadas, que ya lo hemos mencionado al tratar de la SUMA. Y más aún en lo que respecta a la expresión asociada al operador. El signo « + » representativo de muy diversas expresiones (situaciones):

— Tengo tantos y «me dan» tantos
— A tantos que tenía «le junté» tantos otros
— «Me dieron», «me encontré», «añadí», etc.

Utilizar el signo « + » para resolver situaciones con expresiones verbales tan diferentes es, un efecto, el fenómeno generalizador, la GENERALIZACION. Si no se llega a generalizar (hace propio el esquema operatorio y aplicarlo a diferentes situaciones) el signo « + », hay que volver sobre pasos anteriores.

El signo «-» es en principio, representativo de diversas acciones que van decantándose como de «quitar»:

— Tengo tantos y «me quitan» tantos
— «Me roban», «se perdieron», «se caen», etc.

El esquema consiste en que dada una cantidad inicial hay que disminuirla restándole otra. Es descender en la recta numérica. Pero lo importante es la aplicación del mismo esquema operatorio a todas ellas.

LA RESTA QUE NO LO PARECE

Hay situaciones o problemas como los del tipo 2, vistos en las páginas anteriores, cuyo tratamiento es conveniente hacerlo, si es que no han surgido en el aula, al hilo de los del tipo 1.

Es muy probable que surjan sucesos aprovechables para su tratamiento como el siguiente:

«Jorge tenía en su estuche 12 lápices de colores pero ahora sólo tiene 4» ¿Qué ha pasado? ¿Cuántos le faltan?.

Si no disponemos de situaciones apropiadas podemos provocar que surjan, por ejemplo mediante juegos. Veamos dos juegos de este tipo.

JUEGO DEL LADRON

Cada chico tiene sobre su mesa una pequeña cantidad de material (chapas ó corchos o botones o cualquier otro con tal de que sea discontinuo). Cada niño dice el número de elementos que tiene. A una señal del director del juego (el maestro o un alumno) se vuelven de espalda, y otro «el ladrón», va pasando y quitando a cada uno unos cuantos elementos. A continuación cada uno va diciendo cuántos elementos tenía, cuántos le quitó el ladrón y cuántos le quedan.

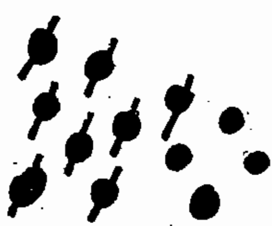
Este juego ofrece muchas variantes motivadoras que constituyen ejercicios de cálculo vivo.

Es interesante simbolizar el juego. Todos tienen ahora papel y lápiz menos el ladrón y otro chico que será a quien robe el ladrón.

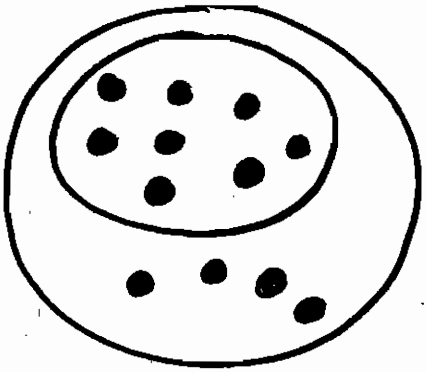
Sea, por ejemplo, que ese chico tenía 12; ha pasado el ladrón y le ha dejado sólo 4.

Para mayor sencillez podemos solicitar de los alumnos que representen la «historia» sin números.

Iran convergiendo a través de sucesivas «historias» similares, debates y votaciones en una representación de este tipo:



En aulas donde se ha trabajado el enfoque conjuntista viene a concluir, normalmente, en esta otra, que es básicamente igual a la anterior:



Podremos convenir en que estas representaciones son una visualización de la «historia» que cada cual tiene en su mente y que constituye la base psicológica de estos problemas.

Pero cambiemos de modo de representar. Pidamos que ahora lo hagan con números y el signo que ya conocen: «quitar». Las dificultades aumentan porque ahora han de escribir las tres partes del problema, es decir, el estado inicial, el operador y el estado final o resultado sin conocer el operador que es lo que falta en este tipo de problemas. El esquema aritmético es, en estos casos, más complicado que el conjuntista.

Las representaciones anteriores eran útiles porque tachando elementos, o rodeando, podían averiguar el operador, «cuántos se había llevado el ladrón». Sin embargo, la representación aritmética, que sería 12 - ... = 4, los coloca en la situación de averiguar el operador sin tachar ni manipular sino calculando mentalmente. ¿Cómo averiguarlo? El recurso que más frecuentemente usan es el de ascender en la recta numérica, en este ejemplo, desde 4 hasta 12. Otros descienden y obtienen un resultado idéntico.

JUEGO DEL REY MAGO

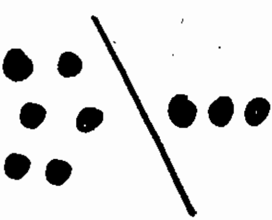
Es un juego opuesto al de ladrón. Cada alumno tiene un determinado número de objetos. A una señal se vuelven de espaldas y va pasando el «rey mago», añadiendo unos pocos objetos a cada uno. Después hay que verbalizar cuántos se tenían, cuántos se tienen, ahora y cuántos ha regalado el «rey mago».

Una variante competitiva de este juego es el juego de «el abuelo». Se juega de tres en tres. Uno hace de «abuelo», otro de nieto y el otro chico observa. Alternativamente se van cambiando los roles. Aquí el «abuelo» hace lo mismo que en el otro juego hacía el «rey mago». El nieto debe acertar y el observador vigila si la respuesta es ó no es correcta.

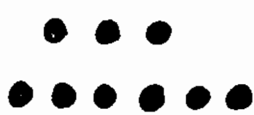
Solicitaremos, después de haber jugado bastantes veces, la representación, «el dibujo», de problemas como los del juego. Sea el siguiente:

«Irene tenía 6 garbanzos, ha pasado el «rey mago» y ahora tiene 9 ¿cuántos le dió el «rey mago»?.

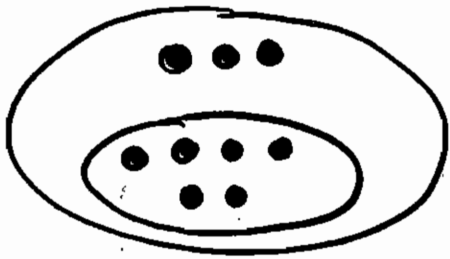
La representación a la que normalmente se llega es a una de este tipo:



o bien

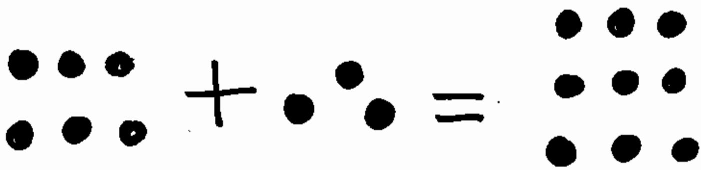


Si los chicos utilizan diagramas sería:



En este tipo de representaciones no aparece nunca representado el operador, esto es, lo que hace «el abuelo». Por lo tanto es interesante pedir que representen el problema en cuestión haciendo notar esa falta, para que vayan caminando a la forma de representación aritmética.

La representación a la que llegan es como este modelo:



o sea, una adición. Y si pedimos que estos problemas los representen con números lo hacen como la suma.

6 + 3 = 9

Lo hacen así porque antes de representar el problema ya han calculado mentalmente la solución ascendiendo en la recta numérica y escriben, ya encontrados, los tres datos del problema.

Nos encontramos, pues, que en el nivel del que hablamos -curso I- las situaciones o problemas de este tipo se resuelven aditivamente. ¿Es por eso por lo que decimos que estas restas no parecen restas. ¿Por qué?.

Tal y como hemos venido iniciando el aprendizaje de la operación, ésta, a nivel gráfico o simbólico se vive como la representación de un problema. En otras palabras, la operación es por ahora la descripción de una acción.

Será más adelante, cuando operen con números algo mayores y hayan tenido más experiencias, como por ejemplo, la de la balanza, de la que luego se hablará, cuando podrán invertir los términos y dado un problema de los de este tipo, por ejemplo, 25 - ... = 11 llegarán a efectuarlo restando 11 de 25; entonces podremos hablar de la resta en sentido realmente operatorio.

Por último diremos que enfocar el aprendizaje así favorece:

a) La comprensión de las situaciones y la construcción del esquema lógico del todo y las partes, base de la operación.
b) La transcripción de hechos reales al plano simbólico, lo cual va haciendo comprensible el lenguaje matemático puesto que es recreado por los alumnos.
c) La invención de problemas y el ejercicio inverso; es decir, dada una expresión, por ejemplo, 8 - ... = 3, imaginar un hecho real para ella.
d) La comprensión de los ejercicios tipo:

$$8 - \ldots = 3$$

$$8 - 5 = \ldots$$

$$\ldots - 5 = 3$$

RESTA «LLEVANDOSE»

Conocemos dos enfoques en la enseñanza de la técnica operatoria. El primero y más conocido es el método «austríaco» utilizado ya en la Edad Media. El segundo podríamos denominarlo «método de bases».

La técnica operatoria del «método austríaco» se basa en el principio de las diferencias constantes entre dos cantidades cuando a ambas se les suma o se les resta la misma cantidad. Tomemos un ejemplo: a 52 sustraerle 46; tradicionalmente escribimos así:

$$\begin{array}{r} 52 \\ -\,46 \\ \hline \end{array}$$

Y recitamos «de seis hasta doce, seis; me llevo una, y cuatro y una son cinco. De cinco hasta cinco van cero».

Lo que realmente hacemos es, puesto que a dos no le podemos sustraer seis, añadimos 10 unidades al minuendo. Entonces el número 52 queda convertido en el 62, y para que la diferencia entre minuendo y sustraendo permanezca idéntica, las 10 unidades anteriores las pasamos a continuación al sustraendo pero en forma de decena, (a la cifra de las decenas). El sustraendo aumenta con lo cual la diferencia entre ambos es la misma.

Ahora bien, desde el punto de vista didáctico, no nos parece válido este método en el Ciclo Inicial, porque el objetivo último no se limita y detiene en el manejo del algoritmo sino que, en nuestra opinión, el método operatorio elegido debe posibilitar el conocimiento de nuestra sistema numérico, sentar las bases para el trabajo aritmético en el Ciclo Medio.

En este sentido es preferible optar por el «método de bases». Por este método la técnica operatoria, en la resolución del algoritmo es más simple y, además coherente con la didáctica que propugnamos y con el aprendizaje que los alumnos han desarrollado en la construcción de las decenas. Valga el mismo ejemplo: sustraer 46 de 52;

Descomponemos el minuendo extrayendo una de las cinco decenas y aportándosela a las unidades con lo que sólo quedarán cuatro decenas pero tendremos doce unidades. Así podremos restar seis unidades a doce unidades y cuatro decenas a cuatro decenas:

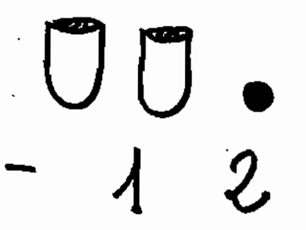
$$\begin{array}{rcc} & 4 & 10 \\ - & \cancel{5} & 2 \\ & 4 & 6 \\ \hline & 0 & 6 \end{array}$$

Si los números son de tres cifras, esta técnica calculatoria refuerza aun más el aprendizaje de los valores posicionales de las cifras y el uso de ello.

El tratamiento didáctico de la técnica de la resta con números de dos cifras es el mismo que el de la suma: situación problemática, resolución de la misma manipulando material, transcripción simbólica.

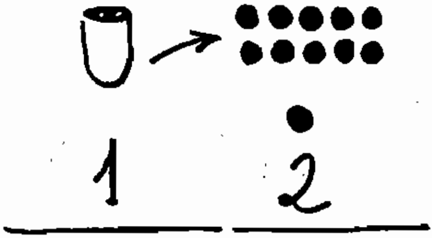
Sea una situación que haya de resolverse restando doce a veintiuno. Colocamos al material correspondiente sobre la mesa, vasos y botones, por ejemplo, y manipulamos pero no colocamos el material del sustraendo sino que lo señalamos con sus cifras respectivas sobre la mesa.

a)



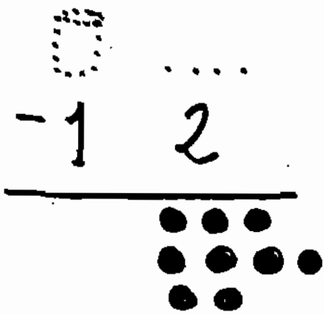
Como no podemos quitar dos unidades a una unidad habrá que vaciar un vaso (decena) en el lugar de las unidades con lo que ya tendremos 11 unidades al tiempo que se nos queda sólo una decena.

b)



A once unidades quitamos dos; nos quedarán nueve que llevamos debajo de la línea. A una decena quitamos una decena y no nos queda nada. La operación quedará así:

c)



No es especial significativo utilizar vasos; viene igual al caso cajas de cerillas u otros tipos de recipientes. Si esta fase de resolución del algoritmo se complementa utilizando material estructurado de base 10, como el de Dienes, mejor.

Cuando la técnica manipulatoria está aprendida, lo propio es pasar a operar con números solamente.

Con números se opera igual que con el material. Para hacerlo evidente y que ello quede interiorizado conviene que los chicos resuelvan una operación manipulado material e inmediatamente resuelvan la misma sólo con números, verbalizando lo que están haciendo, tachando y completando lo que sea necesario.

En el ejemplo anterior se puede hacer así:

$$\begin{array}{rr} \overset{1}{\cancel{2}} & \overset{10}{1} \\ -1 & 2 \\ \hline 0 & 9 \end{array}$$

La utilización de material estructurado, que posiblemente ya conozcan los alumnos al haber tratado la suma, es muy conveniente pues al descomponer centenas en decenas y estas en unidades ejercitan las equivalencias en sentido contrario al de la adición.

Resumiendo, los pasos ordenados cronológicamente que creemos se deben dar son, como en la SUMA:

1.- Manipulaciones directas. El maestro va dando las consignas (V. gr. «a veinticuatro le vamos a restar nueve»), los alumnos colocan el material correspondiente sobre la mesa y operan.
2.- Manipulaciones directas y su simbolización, es decir, resuelven la consigna dada primero con material y luego con números solamente.
3.- Dada una expresión numérica, escrita en la pizarra e inventada por cualquiera representarla con material y resolverla. Por ejemplo, sale un chico y escribe $\begin{array}{r} 32 \\ -16 \\ \hline \end{array}$ cada cual colocará su material y lo resolverá.
4.- Ejercicios de trabajo personal a nivel numérico.
5.- Cálculo mental sobre la recta numérica.

LA RESTA B

En páginas anteriores quedó explicado lo que entendemos por resta B. Las situaciones o problemas agrupados bajo este nombre son los más difíciles de resolver. Es normal encontrar alumnos, incluso en 5.° curso, que tienen grandes dificultades para resolverlos.

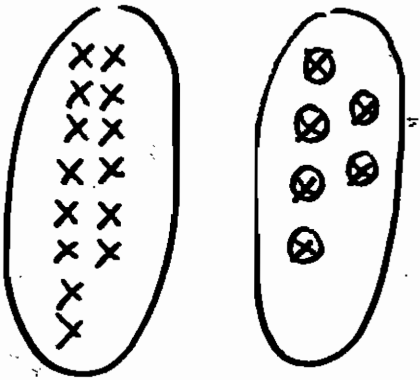
Con el fin de ilustrar su tratamiento en clase vamos a adjuntar la narración de una experiencia realizada con un grupo de alumnos de dos cursos del Ciclo Medio:

> *«El motivo de trabajar la resta con alumnos de estos cursos vino a consecuencia de encontrarnos con problemas de restar que no sabían resolver en unos cuadernillos de problemas que estaban tanto en la comprensión del texto de los problemas como de las operaciones que debían hacer. Les propuse que comenzaramos a aprender a resolver problemas de restar otra vez, como si no supieramos nada, olvidando lo que se había aprendido antes. Preparé un diseño progresivo de la operación y empezamos al día siguiente:*

I

> *Iniciamos la experiencia con una situación no problematizada; ésta: «En clase hay 14 niños y 6 niñas».*
>
> *Lo primero que sugiero es representar simbólicamente esa situación, cuyo texto he puesto en la pi-*

zarra. De las diferentes representaciones propuestas, la seleccionada fue la siguiente:



Conseguido esto pasamos a otra cuestión: inventar preguntas para esa situación. De las diferentes preguntas que surgían fuí seleccionando y escribiendo en la pizarra, correctamente expresadas, las siguientes:

a) ¿Qué conjunto es mayor?
b) ¿Cuántos niños hay más que niñas?
c) ¿Cuántas niñas hay menos que niños?
d) ¿Cuánto es la diferencia entre un conjunto y otro?
e) ¿Cuántas niñas faltan para que haya tantas como niños?

Después de esto nos dedicamos a inventar cada uno una situación del tipo de la anterior, representarla y aplicarle, contestándolas, las mismas cinco preguntas.

II

Durante otra sesión entera hemos seguido el mismo trabajo: uno inventa un problema de este tipo, los demás simbolizan el problema y le aplican las cinco preguntas.

La mayoría de los niños no necesitan ya la representación gráfica para resolver el problema. Calculan mentalmente por adición (por ejemplo, si aquí hay 6 y allí 18, pues 7, 8... hasta 18) lo cual les obstaculiza a algunos para representar el problema como sustracción: 18 - 6 = 12, aunque van tomando conciencia de que en todos los problemas es más fácil, cuando no pueden resolverlos mentalmente, restar al número mayor el número menor.

Quizá lo que más ayude a profundizar en el aprendizaje de la resta sea la verbalización o explicación que cada uno da a su forma de resolver el problema. Hay una cuestión importante que surgió a raiz del siguiente problema:

«En una piara hay 35 cabras y 15 ovejas» ¿Cómo hallamos la diferencia?».

La respuesta expontánea e inmediata de algunos fue que «a las 35 cabras le quitamos las 15 ovejas». Pero otros dicen que no, que «a las cabras cómo les vas a quitar las ovejas» Para dilucidar este conflicto que el problema ha planteado propongo que representen el problema y así veremos con claridad lo que realmente hay que hacer.

Efectivamente, dibujado el problema, los dudosos comprenden que lo que hacemos no es quitar ovejas al conjunto de las cabras, sino restar al conjunto de las cabras tantas cabras como ovejas hay. Es este un matiz esencial en el que insistimos en posteriores problemas pues pasarlo por alto, creo, impide la verdadera comprensión de la operación.

La situación que a continuación expongo vino a hacer patente ese matiz:

Medimos nuestra altura y después las representamos en diagramas de barras. Luego estuvimos comparando y sacando diferencias. Algunos casos los problematizaba yo con el fin de que explicaran como *resolvían el problema. «Prudencio mide 1,45 cm. y David 1,12 cm. ¿Cuánto le saca Prudencio a David?». Se ve claramente en este ejemplo que a Prudencio no le podemos quitar David sino que a lo que mide Prudencio restamos tantos cm, como mide David.*

III

Esta sesión la hemos dedicado a resolver fichas que yo había preparado. Los problemas y ejercicios de las fichas estaban basadas en las situaciones anteriores que se habían dado en clase o en otras parecidas. Su resolución es individual.
Por lo que observo, parece que la claridad en la expresión verbal de cómo se resuelve un problema va paralela a la comprensión y razonamiento del mismo. Es muy importante reflexionar sobre el hecho de que en el conjunto o cantidad mayor efectuamos una partición: un subconjunto equivalente al otro conjunto y el subconjunto diferencial. Y paulatinamente ir interiorizando el razonamiento del todo y las partes.

IV

En días siguientes alternamos la resolución de problemas con juegos sobre la recta numérica. De la recta númerica ya dijimos algo en el capítulo de la suma. Ahora mencionaremos algunos juegos.

1) Materialización de la recta con garbanzos y chapas (decenas) en el suelo. Los chicos, alrededor. Uno dice un número, otro dice otro mayor; el tercer jugador ha de señalar manualmente la diferencia. El juego es rotativo.

Es posible el mismo juego en sentido inverso: uno dice un número, otro dice otro número pero menor que el anterior; el tercer niño halla la diferencia y la delimita realmente.

2) El parchís con dados. Sobre un papel grande o tablero se dibuja la recta de modo similar a los parchís o a los juegos de la oca.

En las caras del dado hay marcados números precedidos del signo «+» o del signo «-», de tal modo que por ejemplo, «+ 12» indica avanzar doce pasos y «-15) indicaría retroceder 15 pasos. Puede haber hasta 4 jugadores. Cada uno tendrá su ficha para mover. La norma principal es que no se puede contar con la ficha de uno en uno como se hace en el juego del parchís, sino que primero se calcula mentalmente y a continuación se traslada mentalmente la ficha.

Las fichas se colocan más o menos en el centro de la recta, para poder avanzar o retroceder. Gana el jugador que antes salga por algún extremo.

3) El juego de los dos dados. El mismo tablero que para el juego anterior. En un dado hay números mayores. En otro menores. Sean en un dado estos: 150, 140, 125, 100, 93, 85. En otro 20, 45, 50, 60, 75, 80. Un jugador lanza primero un dado y luego otro. Debe decir la diferencia entre ambos números. El tablero es mero soporte. Puede haber más de dos jugadores. Se establece un tope de tiradas; en una hoja se van anotando las diferencias de cada uno. Gana el jugador que al final tenga la mayor diferencia que sería aquel al que le hubiese caído la cara 150 y la 20.

Los juegos sobre la recta ofrecen tres puntos importantes. A mi juicio son:

1.- Son principalmente ejercicios calculatorios para los cuales la recta sirve de apoyo y comprobación. La recta les sirve para rebasar las decenas. Así, por ejemplo, cuando uno dice 23 y otro 42, el tercero usa normalmente este razonamiento: de 23 hasta 30, 7; de 30 hasta 40, 10 y ya van 17. De 40 a 42, 2. En total van 19.

2.- Un segundo punto importante es que lo que se cuenta en la recta son las distancias entre elemento y *elemento, no los elementos. De 2 hasta 5 van 3, pero 3 espacios no tres elementos, a menos que se incluya el 5.º elemento. Esto es algo difícil para niños débiles. Hay quien duda, por ejemplo en cuántos van de uno a tres o de cero hasta dos y salen de dudas verificándolo en la resta.*

3.- Los juegos de mayor a menor facilitan la asimilación de un detalle importante: de 23 hasta 42 van 19, pero cambiando el orden de los números es decir de 42 hasta 23 también van los mismos 19, por lo tanto podemos hallar la diferencia «yendo hacia arriba» en la recta o «yendo hacia abajo».

V

La última experiencia que hicimos fue la de las balanzas. Aprovechando el taller de carpintería construyeron una balanza para cada dos, del tipo clásico:

Con la experiencia de las balanzas se proponían dar el paso a operar a nivel aritmético. La balanza es un símil fecundo de una ecuación: Los dos platos pueden ser a nivel real lo que los dos miembros de una ecuación a nivel abstracto; el fiel de la balanza, que nos indica el equilibrio puede ser como el signo «igual» de la ecuación.

La balanza sirve para pesar; se pesa equilibrando ambos platos. Para equilibrar realizamos ciertas acciones y razonamientos. Esos razonamientos son los mismos que a nivel abstracto realizamos en una ecuación. En consecuencia la experiencia con balanzas tiene por objeto que tomen conciencia de lo que hacen realmente y lo generalicen, abstraigan y les sirva de soporte experiencial para la resolución de abstracciones aritméticas.

Cuando estuvieron construídas y después de un tiempo de experimentación libre nos dedicamos al trabajo dirigido en el que yo iba dando consignas a hacer. El material a usar fueron las unidades del material multibase (cada una mide 1 cm^3), por pesar todas igual.

La norma: que la balanza debe equilibrarse siempre. Cada equilibración que hacemos con el material la representamos seguidamente con números.

a) Consignas simples.

En el plato de la izquierda poned 15. ¿Qué pondréis en el de la derecha?».

La respuesta general e instantánea es obvia: 15. Pero con la pregunta «¿siempre 15?» aparecen divergencias.

— *Puedes poner 10 y luego 5.*
— *También 14 y luego 1*
— *Sí, siempre 15. Lo que pasa es que se puede poner en dos o tres veces pero tiene que ser siempre 15.*

Y hacemos lo siguiente: cada uno debe escribir su pesada pero pero de modo distinto a los demás. Son escrituras como las siguientes:

$15 = 11 + 4$
$15 = 14 + 1$
$15 = 8 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$

Cambiamos de plato. «Poned 15 en el de la derecha. ¿Qué pondréis en el de la izquierda?».

Ahora las escrituras son así:

$$14 + 1 = 15$$
$$11 + 4 = 15$$

Continuamos con consignas similares, cambiando de plato pero sin necesidad de poner manualmente los objetos en los platos de la balanza.

Para el pensamiento adulto el hecho de que si A = B, entonces B = A es algo evidente, pero no es tan evidente en principio para muchos niños. Por lo mismo, si 15 = 14 + 1 entonces 14 + 1 = 15. Las experiencias y consignas de este tipo iban encaminadas a observar que los dos platos (ambos términos de la ecuación) son intercambiables.

Algunos descubrimientos son interesantes:

Da lo mismo leer primero el «plato», de la izquierda y luego el de la derecha que al revés.

— Si Jacinto es hermano de Eva entonces Eva es hermana de Jacinto.

— Si Francisco tiene la misma edad que Daniel, Daniel tiene la misma edad que Francisco.

b) Equilibraciones libres.

Aunque ya sabemos que da lo mismo empezar por un «plato» que por el otro, tomamos la norma de empezar siempre por el de la izquierda.

Las experiencias de ahora no son tan sencillas:

«En un plato hay 25 y en el otro 33.». ¿Cómo podemos equilibarlos?.

A nivel manual caben varias opciones:

— Añadir al de 25 hasta igualar con 33.

— Quitar al plato de 33 hasta dejarlo en 25.

— Quitar al plato de 33 y añadirlo al de 25, con lo que habrá 29 en cada plato.

Experiencias de este tipo son abiertas y favorecen la búsqueda y la divergencia. Un detalle de importancia *es que casi nunca necesita hacer uso del material, a pesar de tenerlo a mano. Solamente recurren a él en caso de discusión, para comprobar.*

c) Equilibraciones no libres.

Ahora no es necesario manipular. Conservamos el símil de la balanza pero operamos a nivel numérico, sin material, en encuaciones de dos tipos:

c.a) 25 + ... = 40 --- $A + X = B$
c.b) 30 - ... = 16 --- $A - X = B$

c.a) En un plato hay 25 en el otro 40 ¿cuánto añadiremos a 25 para tener 40? ¿Cómo encontrar ese número?.

c.b) A 30 le quitamos algo y nos quedan 16 ¿cuánto quitamos? ¿cómo encontrar ese número?.

En estos ejemplos en los que la incógnita pueden hallarla mentalmente por tratarse de números asequibles sin necesidad de algoritmos, no se ve con claridad el esquema de resolución de las ecuaciones planteadas.

Me pareció entonces conveniente dar un nombre al número que había que averiguar y además que los números fueran algo mayores. El nombre convenido fue «M». Los ejercicios eran como los anteriores con variaciones de dos clases:

1.- Yo digo un ejemplo y ellos lo escriben aritméticamente y lo resuelven:

«En un plato hay 23 en otro 100. ¿que añadiremos a 23 para llegar a 100?»
La escritura era 23 + M = 100.

El «trúco» convenido es hacer la cuenta de restarle 23 a 100 para hallar el valor de «M». Hallado el valor de «M» hay que comprobar su validez sumándolo a 23 para ver si obtenemos 100.

Curiosamente si invertimos el problema hay que hacer la misma cuenta.

«En un plato hay 100 en el otro 23. ¿Qué quitamos a 100 para tener 23?.

Su escritura será: 100 - M = 23

2) Yo escribo con números, por ejemplo 120 - M = 85; cada uno inventa un ejercicio para esa escritura.

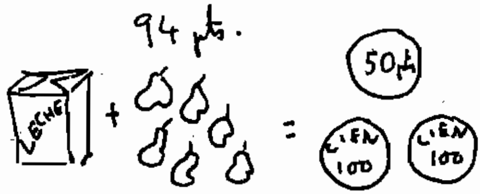
Después de esto abandonamos las balanzas y proseguimos haciendo a nivel personal ejercicios aritméticos y problemas de los cuadernillos de problemas. De los problemas expondré algunos modelos que me parecen bastantes interesantes:

Juntando los alumnos de nuestra clase y los de la de enfrente hay 57. Si en la nuestra somos 24, ¿cuántos hay en la otra?.

¿Cuánto pesa el saco de harina?

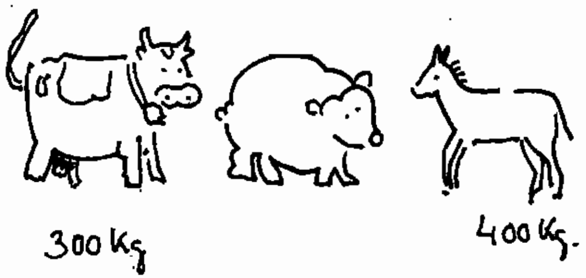
En mi mano izquierda tengo 35 pesetas. Lo que tengo en la derecha no te lo digo pero sí te digo que reuniendo lo que hay en las dos manos tendría 135 pesetas. Averigua el dinero que hay en mi mano derecha. A ver si eres capaz de hacer el problema de dos formas diferentes.

¿Cuánto vale la leche?



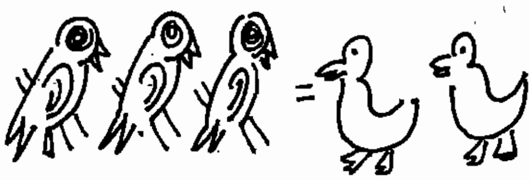
A un número desconocido le resté 55 y me quedó 30. ¿Sabrías encontrar ese número desconocido?.

Entre todos pesan 1.070 kg. ¿Cuánto pesa el oso?



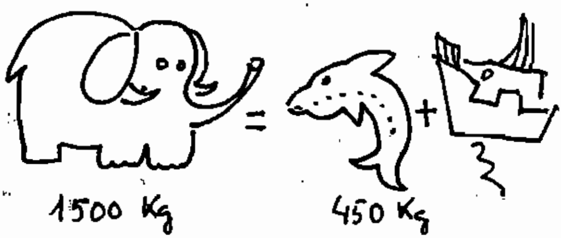
Entre Prudencio, David y Sonia juntan 36 años. Prudencio tiene 11 y David tiene 3 más que Prudencio. Calcula la edad de Sonia.

Todos los animales juntos valen 6.000 ptas.
¿Cuánto vale un loro?



Inventa tú un problema parecido al anterior.

David fué a la tienda y compró tres barras de pan a 35 ptas la barra. También compró una tableta de chocolate que le costó 160 pts. y una botella de aceite de 210 pts. Pagó con un billete de 500 y lo que le devolvió el tendero se lo gastó en pipas. ¿Podrías hallar cuánto dinero se gastó David en Pipas?



¿Cuánto más pesa el yate que el delfín?

UNA SOLA RESTA

En el aprendizaje de la resta, como en el de la suma se suceden varias etapas pero caracterizadas en este caso por su mayor complejidad. Como se ha podido ver, la resta se convierte en operación aritmética al final de un largo proceso.

Nos queda por señalar dos cuestiones importantes:

a) Si bien en este capítulo hemos tratado aisladamente aspectos específicos de la operación y también, a nivel escolar, conviene tratar específicamente determinados aspectos de la misma, la didáctica debe ser global en el sentido de no concebir una operación como independiente de la otra. De ahí la importancia de situaciones y problemas para cuya resolución han de efectuarse las dos operaciones.

b) Los aspectos lógicos y numéricos van indisolublemente unidos. El cálculo y la ejercitación en cuentas, no bastan para resolver problemas.

De modo contrario, comprender y saber cómo resolver un problema no es suficiente si además no se poseen las herramientas de cálculo que nos permiten su solución. La confluencia de ambos aspectos tienen lugar en una didáctica que tome como eje central la resolución de problemas. En esta perspectiva, lo que comienza siendo una transcripción simbólica de un hecho o problema, acaba por convertirse en un esquema de razonamiento, en una herramienta para resolver problemas.

LIBROS UTILES

— Es recomendable la lectura de las obritas de la colección «Enseñanza de las Matemáticas Modernas» de editorial Teide en especial las de Dienes.

— «Itinerario Matemático» de Touyarot en ediciones Jover. Es un trabajo discutible pero de gran utilidad en algunos aspectos.

— «Método integral para el aprendizaje de la matemática inicial». Oñatilla y Baffa de Trasci, en Kapelusz.

Discrepamos del enfoque programático y de muchos de los puntos contenidos en este libro. Sin embargo es una obra recomendable para quienes se acercan por primera vez a la enseñanza de las matemáticas.

— Sobre la construcción de los primeros números, las primeras relaciones y los inicios del cálculo hay en el mercado dos tipos de publicaciones aprovechables:

a) —Uno, de tipo práctico y didáctico del que entresacamos unos cuantos con orientación diferentes:

— «Los comienzos del cálculo de Bandet y otros en editorial Kapelusz.
— «Antes del cálculo» de B. Beauberd editorial Kapelusz.
— De editorial Teide la serie «Los primeros pasos en matemática» de Dienes y Golding y los materiales anexos.
— La colección «Aritmética con números en color» de C. Gateño editado por Cuissenaire de España.

b) Otro, de orientación fundamentalmente psicológica y teórica. Destacamos los trabajos de Piaget y colaboradores, así como los fundamentados en ellos. Entre estos últimos conviene resaltar: «La comprensión de número y la educación progresiva del niño según Piaget» de E. Lawrence en editorial Paidos.

— Una obra no encajable en el grupo anterior es la de F. Jaulin Mannoni editado por Pablo del Río Editor en 2 volúmenes con los títulos de: «Las cuatro operaciones básicas de las matemáticas» y «La reeducación del razonamiento matemático».

UNA DIDACTICA VIVA

Hemos hablado en estos dos capítulos de las dos operaciones básicas: suma y resta. En nuestra exposición hemos destacado la construcción de las operaciones y de conceptos mediante un proceso de progresiva simbolización colectiva que partiendo de situaciones problemáticas, juegos, o problemas y usando material manipulable adecuado va cristalizando en la apropiación de esquemas operatorios.

Ahora bien las sesiones colectivas no son suficientes. Tienen el objetivo de crear grupalmente el lenguaje matemático, de convenir unas estrategias y técnicas de resolución de problemas, de crear una dinámica coperativa participativa en el aula, de motivar aptitudes de investigación y superación personal. Pero no son, ni pretendemos que sean, suficientes.

Al mismo tiempo y de forma paralela es conveniente desarrollar un plan de trabajo matemático libre que es el que realmente hace avanzar el desarrollo del pensamiento. Este trabajo paralelo se centra alrededor de:

1.— Experiencias de larga duración aprovechables para el aprendizaje matemático.

—Calendarios. Hay diversos tipos; el más extendido es un conocido modelo con el que se va controlando y simbolizando el tiempo: sol, lluvia, viento, etc.

— Experiencias e investigaciones del campo de las ciencias naturales y sociales: Control del crecimiento de plantas, etc.

— Cooperativa escolar. Aunque a veces la cooperativa de clase no consiste más que en que los alumnos aporten semanalmente una pequeña cuota para la compra de material de uso colectivo es, por si misma, una fuente inagotable de interrogantes matemáticos.

— Experiencias diversas. Un ejemplo aleccionador es la de «La Tienda». Véase la revista «Colaboración» núm. 44 del M.C.E.P.

2.- Materiales que posibilitan un trabajo continuado.

Destacaremos los siguientes.

—Fichas confeccionadas por el maestro relativa a la temática que se esté trabajando y que quedan a disposición de los alumnos, igual que los materiales con los que se trabaja en las sesiones colectivas.

— Libretas programadas que bajo el título «Del cálculo vivo a la matemática» edita Escuela Popular.

— Fichero de cálculo, compuesto por fichas autocorrectivas de dificultad creciente. No podemos dejar de recordar a Freinet cuando defendía que la auto-corrección es un estimulante para la superación personal.

— Fichero de problemas. Consiste en la elaboración de colecciones de problemas sobre todo por parte de los alumnos. Es frecuente que el maestro también contribuya aportando problemas muy específicos. El niño escribe su problema acompañado de su posible solución. Una vez corregido con el maestro, lo pasa a una tarjeta, cartoncillo o ficha que irá a engrosar el fichero. Por una cara va la escritura del problema y por otra su solución. Si las fichas están numeradas se puede ir controlando la cantidad de ellas que cada alumno hace mediante un panel o cuadro que permanece en la pared.

La escritura de problemas constituye un hecho en el que confluyen aspectos tanto matemáticos como estrictamente lingüísticos.

3.- Situaciones espontáneas.

Si la dinámica conseguida en el aula es abierta, participativa y no encorsetada en rígidos patrones escolares surgen situaciones aprovechables como son por ejemplo, las salidas al medio, organización y distribución del espacio en clase, cumpleaños, formación de equipos, etc.

Y no olvidemos que la práctica del texto libre permite, y de ello hay varias experiencias publicadas, la aparición de situaciones peculiares.

En resumen, si intentamos (en contra de una pedagogía trasmisora e insulsa) que sea el niño quien construya sus conceptos y esquemas operatorios, alternaremos el trabajo colectivo con el individual, poniendo a su disposición los medios idóneos y aprovechando la riqueza de la vida del aula.

Quizás convendrá hacer algunas observaciones sobre dos aspectos centrales y que intencionadamente hemos olvidado: El papel del maestro y la organización de la clase.

Para ambos puntos remitimos al lector a la lectura de la bibliografía existentes sobre pedagogía Freinet ya que su discusión excedería el marco de este trabajo. Solo reseñar brevemente que la didáctica propuesta pretende situarse dentro del marco de una pedagogía del descubrimiento. Recordemos que en el modelo de escuela tradicional transmisora, el maestro que es el que sabe transmite directamente («enseña») los conocimientos que deben ser adquiridos con todas las connotaciones anexas que esto conlleva. En el modelo de escuela activa el maestro modifica su papel haciendo que los alumnos manipulen, experimenten, para comprender aquellos contenidos que deben ser aprendidos. Con demasiada frecuencia las experiencias suelen ser ilustrativas.

A diferencia del anterior, en un modelo de pedagogía del descubrimiento se recogen aspectos de la escuela activa y se profundiza en ellos: el maestro no adelanta al alumno aquello que se pretende que descubra sino que favorece su descubrimiento con experiencias, razonamientos o ejemplos similares; se vale de la discusión y el diálogo socrático; la didáctica está en contínua reelaboración como se ilustra en el capítulo II a), se toma el error como posible fuente de conocimientos; por último se resalta la importancia de situaciones que provocan conflictos cognitivos para la reestructuración de conceptos y esquemas y el surgimiento de otros nuevos.

Entre las sesiones colectivas y los momentos de trabajo individual existe otra modalidad: El trabajo en grupo cuya importancia no ha sido suficientemente resaltada en la pedagogía de las matemáticas. Sabemos que la interacción ambiental y el intercambio experiencial y linguístico son estimuladores del desarrollo intelectual. Esa es una argumentación psicológica que esgrimen los defensores del trabajo en grupo y que suscribimos.

Pero además, para el tema que tratamos, existen otras dos razones fundamentales: una que el trabajo en equipo conlleva importantes aspectos formativos; otra, que resaltamos, que dinamiza la vida de la clase.

La combinación de momentos de trabajo colectivo, grupal o individual, el aprovechamiento de situaciones explotables, la inculcación de actitudes de investigación y autosuperación corren a cargo del maestro, quien con habilidad e ilusión puede conseguir una dinámica viva de su aula, que haga olvidar las somnolientas didácticas de las matemáticas a las que estamos desgraciadamente acostumbrados.

IV c

Multiplicación

La iniciación a la MULTIPLICACION se suele llevar a cabo generalmente en alumnos del II.° nivel del Ciclo Inicial. No obstante, tenemos constancia de experiencias de iniciación a la multiplicación con alumnos de 1.° nivel o en el curso III.

No es nuestra misión legislar el momento en que ha de tener lugar. Pensemos, por el contrario, que el propio desarrollo de los alumnos es el mayor indicador del momento en que se deba tratar sistemáticamente esta operación.

Conocemos cuatro enfoques metodológicos diferentes, incluso dos de ellos contrapuestos entre sí, de la iniciación a la MULTIPLICACION:

A.— Como suma de sumandos iguales.
B.— Como producto cartesiano.
C.— Desde el punto de vista de la teoría de conjuntos.
D.— Desde el punto de vista de estados y operadores.

Comentemos brevemente cada uno de los enfoques.

A) COMO SUMA DE SUMANDO IGUALES

Es este el enfoque más extendido y habitual en las escuelas. La inercia, la tradición y su aparente facilidad le hacen ser el preferido de la mayoría de los maestros. Sin embargo, las nefastas consecuencias que depara a los alumnos en etapas posteriores a la iniciación ponen en evidencia este enfoque. Su inconveniencia estriba en dos tipos de razones:

— Unas de índole matemática: la multiplicación no es, ciertamente, una adición repetida. Aunque los resultados de ambas operaciones sean equivalentes, cosa que induce a confusión, no por ello ha de pensarse que son operaciones idénticas.

— Otras de orden didáctico. Bajo este enfoque se suprime todo un proceso de simbolización y abstracción necesario para la comprensión de la operación. Así mismo, se prima la repetición y memorización de resultados, en detrimento de la búsqueda personal y la resolución de situaciones dispares.

B) A PARTIR DEL PRODUCTO CARTESIANO

Se basa este enfoque en un caso especial de la multiplicación, por lo que difícilmente es, más tarde, generalizado por los alumnos. Aunque, según las experiencias que nos constan, al principio es grato a los alumnos, con el tiempo resulta serles arduo y dificultoso. No obstante, es ésta una perspectiva a tener en cuenta.

Para no extendernos demasiado en disquisiciones, adjuntamos el relato de una experiencia en la que se nos muestra el camino recorrido en la construcción de la operación trabajada bajo este enfoque en un aula de 2.° curso.

«En nuestra clase iniciamos la matematización de operaciones multiplicativas a finales del II.° trimestre. Antes nos habíamos dedicado a trabajar otras cuestiones, fundamentalmente bases y aspectos de la matemática de conjuntos.

Lo que sigue se refiere exclusivamente a la MULTIPLICACION dejando aparte actividades como medir, pesar, libritos de cálculo, contabilidad de la cooperativa, etc, que desarrollábamos paralelamente en tiempos de trabajo libre.

El camino seguido lo voy a ir precisando en los pasos sucesivos que hemos dado y explicando brevemente cada uno. Los números no indican actividades sino núcleos de actividades del mismo tipo.

1) Comenzamos haciendo correspondencias.

a. Primero correspondencias espontáneas entre ellos mismos, entre ellos y objetos de la clase y entre objetos a nivel real.

2) Dibujamos esas correspondencias y otras que salían.

El signo que se aceptó para la representación fué la flecha.

3) Fichas preparadas por mí sobre correspondencias, obviando los aspectos de reciprocidad y biunivocidad.

Una vez superadas dificultades como: cuántas flechas salen de cada elemento, cuántas salen del conjunto, cuántas recibe cada elemento, etc., pasamos a correspondencias entre todos y cada uno de los elementos de los dos conjuntos que fueren.

4) Sobre la realidad buscamos soluciones a situaciones planteadas por mí del siguiente tipo:

—Vamos a bailar una danza pero sólo estan tres chicas y dos chicos (salen a hacerlo). ¿Cuántas parejas formarán? Pero si la danza continúa y tienen que bailar todas con todos, ¿cuántas parejas podrán formar?

—Una chica (cualquiera de la clase) tiene tres jerseys distintos y tres faldas distintas; ¿de cuántas maneras distintas se podrá vestir?

En realidad son correspondencias.

5) Después de debatir como resolver situaciones de este tipo y resolverlas de hecho, pasamos a dibujarlas. Representar gráficamente la resolución de estas situaciones presenta dificultades al principio. Como seguían con el esquema de dibujo de las anteriores correspondencias (fechas), averiguaban el número de flechas.

Ilustración 1

6) Más ejemplos y situaciones, reales o inventadas, con todo lo disponible en clase (los muñecos de guiñol son también material matematizable) que se resuelven sólo dibujando. O sea, se sustituye la acción física real (manipulación y movimiento) por la representación gráfica de la misma. Unicamente manipula los objetos aquel al que aun le sea imprescindible.

A esto que haciamos de corresponder de esta manera todos y cada uno de los elementos de un conjunto con todos y cada uno de los de otro conjunto yo le llamé MULTIPLICAR.

Ilustración 2

7) Para explicar el aspecto cuantitativo, ahora dibujamos y colocamos los números debajo (cardinales). ¡Pero al dibujar con números necesitamos un signo!.

¿Qué es, pues, multiplicar? A juicio de unos es «como cruzamientos»; para otros, «como que se cruzan»; «se hace así (con las manos) y es más grande»; «multiplicar es cruzar».

Y como multiplicar es «cruzar», el signo con el que nos quedamos -signo que ya conocían por influencia familiar- es el común: X

Ilustración 3

8) Introducción por mi parte de los ejes cartesianos. Con ello se pusieron de manifiesto los problemas del estaticismo de la imagen: «Si a éste lo dibujo con éste! cómo lo voy ahora a dibujar con este!». Las discusiones al respecto son muy interesantes. Se trata de que, si bien la representación gráfica es estática, la operación mental que efectúan es móvil espacial y temporalmente. Problemas similares se plantean cuando hacen el producto manipulando objetos.

A pesar de la introducción de los ejes cartesianos para ver la equivalencia entre «número de recuadros» y «número de parejas», que «si se colocan de otra manera sale el mismo número», etc», cuando se plantea dibujar un problema lo hace cada cual de una manera peculiar, lo que equivale a decir que cada uno interioriza a su modo lo que hace o hemos hecho.

Ilustración 4

9) Distinción entre multiplicar dos conjuntos y unir esos mismos conjuntos.

Por ejemplo, si multiplicamos un conjunto de dos chicos con otro de tres chicas (caso citado de la formación de parejas para danzar) obtenemos seis ((¿parejas?, ¿cruzamientos?, ¿simplemente 6?)). Pero si sumamos esos mismos conjuntos nos da 5. Tanto la operación como el conjunto resultante y su cardinal respectivo son diferentes en uno y otro caso.

10) Construcción colectiva de una tabla, «la del 5», o sea, teniendo como conjunto inicial un conjunto de cardinal 5. No dibujan real sino simbólicamente los elementos.

Algunos habían descubierto que sumando repetidamente se obtenía el mismo número que dibujando el problema. Construir la tabla en cuestión sirvió para hacer extensivo este descubrimiento, lo que les valía a muchos para saber el resultado antes de dibujar. Era, decían, «un truco rápido».

11) Seguimos construyendo tablas. Muchos preveían los resultados, sobre todo con cardinales iniciales 10, 2, 3 y 5. Esta agilidad calculatoria parece debida a haber trabajado bases. La contabilidad de la COOPERATIVA favorece el cálculo con el cardinal 5.

Ilustración 7

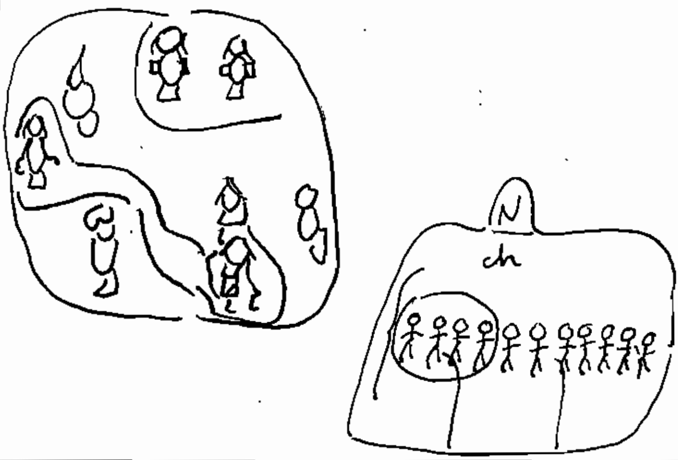
Hasta aquí todo el trabajo ha sido encaminado a:

1.°) Presentada o surgida una situación, resolver los interrogantes que yo o ellos planteaban.

2.°) Representar gráficamente lo hecho intentando llegar a una simbología en unos casos, o a representaciones gráficas inteligibles en otros.

3.°) Ambos pasos envueltos en discusiones, debates y reflexiones. La finalidad de ello es ir caminando hacia la abstracción pero apoyándose en imágenes. Por ahora al aspecto cuantitativo ha quedado en un *plano secundario, acudiendo a él sólo como apoyatura y porque parece imposible que disocien lo cualitativo de lo cuantitativo en las cuestiones tratadas.*

N.° 1 Intentos de representación de una situación de 3 x 4



N.° 2

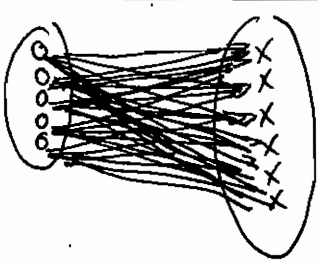


Gráfico de una situación de 5 x 6

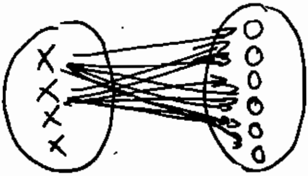
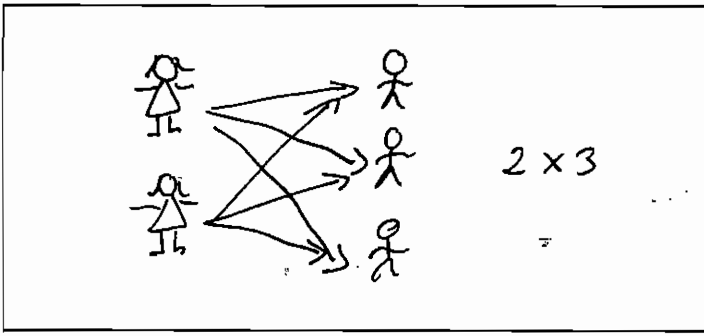
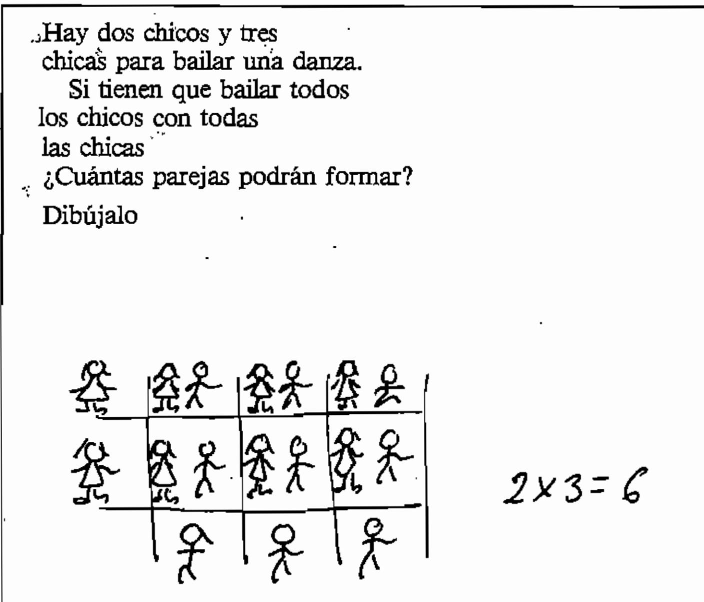


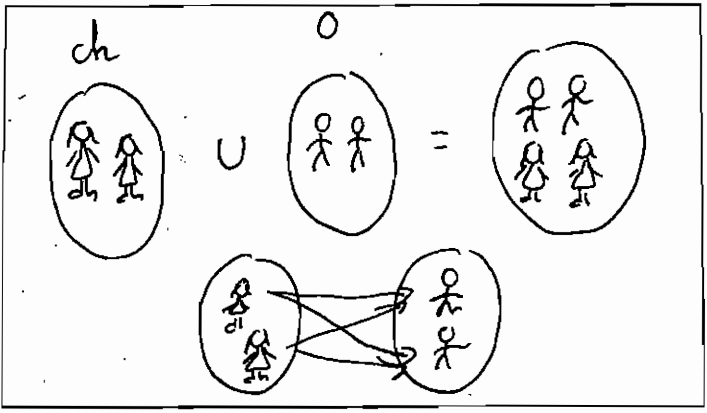
Gráfico inconcluído de 4 x 6



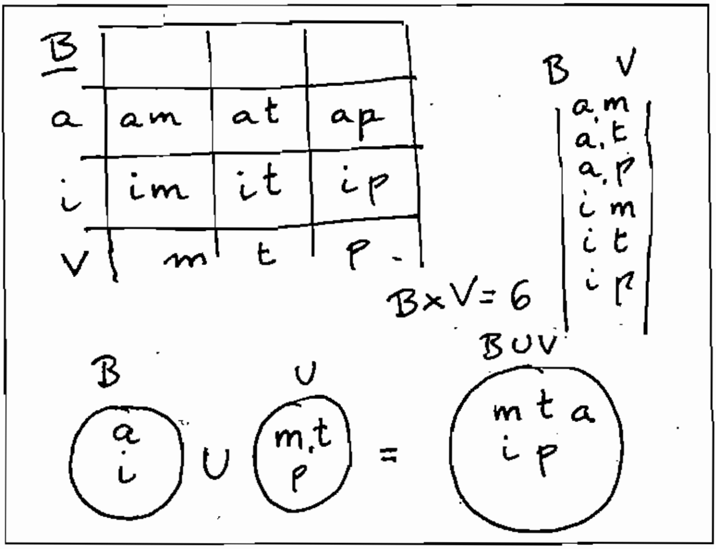
N.° 3 Representación de una situación de baile de 2 x 3. El autor ya emplea el signo X.



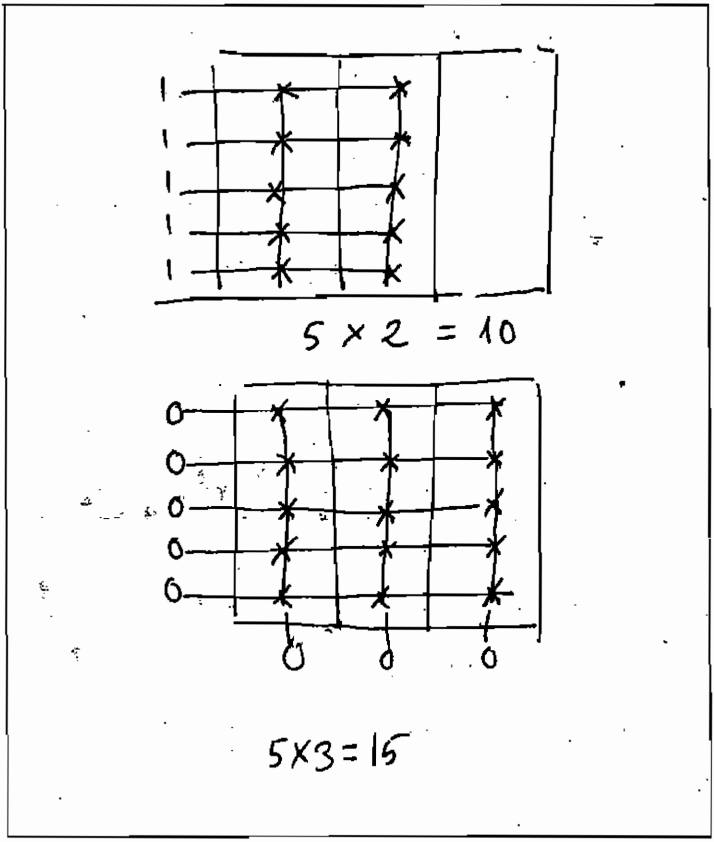
N.° 4 Representación gráfica y numérica de una situación planteada en días anteriores.



N.° 5 Distinción gráfica entre unión de los conjuntos de dos elementos cada uno y multiplicación de los mismos. El autor no ha llegado a la representación por ejes.



N.° 6 Distinción gráfica ya correcta entre producto y unión de B y V donde B = (a, i) y V = (m, t, p,)



N.° 7 Aquí se ha dado un paso superior hacia la abstracción. Son las intersecciones singulares que ellos llaman «cruzamientos». Se ha superado la representación figurativa y la cartesiana.

Posteriormente pude comprobar que el esquema operatorio que poseían los alumnos les era insuficiente para resolver otras situaciones también de tipo multiplicativo. El trabajo desarrollado nos había servido para construir las tablas, para ver que multiplicar no es sumar, para conocer algunos aspectos de equidistribución, para la construcción colectiva del signo de la operación y para aprender a apoyarnos en grafos y otros signos. Pero situaciones como:

— En el cajón hay 5 cajas de colores. Cada caja tiene 6 lápices. Averiguar los lápices que hay en el cajón.

— Vamos a comprar 8 lápices a la tienda. Un lápiz nos cuesta 7 pesetas.

Y otras similares les parecían muy extrañas y se veían incapaces de abordarlas por lo que abandonamos los ejes cartesianos y demás grafos para dedicarnos a ellas».

C) LA MULTIPLICACION CONJUNTISTA

Hay experiencias que inician la enseñanza de la multiplicación a partir de distinciones conjuntistas de elementos, conjunto, y conjunto de conjuntos. Dan primacía a los aspectos lógicos y a la terminología retrayendo a un plano posterior lo numérico.

Es este un enfoque bien fundamentado teóricamente y que ataja un aspecto esencial de la operación, que la diferencia de la suma: de los dos factores, multiplicando y multiplicador, uno se refiere a los conjuntos.

Normalmente los partidarios de este enfoque, comienzan con manipulaciones de material discreto formando conjuntos equivalentes y problematizando situaciones similares. Simultaneamente trabajan las nociones de inclusión y pertenencia inclusiva. Y se inician con problemas del tipo:

«Una casa tiene cuatro viviendas, cada vivienda tres habitaciones, en cada habitación hay seis sillas».

Este enfoque surgió como consecuencia de la remodelación que hace años sufrió la matemática escolar. Aunque su existencia práctica no es generalizada, no hay que pasar por alto el que ha sido una aportación válida a la didáctica de la matemática.

D) ESTADOS Y OPERADORES

Una forma atractiva y eficaz de enfocar la enseñanza de esta operación y de otras es, con cierto tinte lúdico, introducir el concepto de operador a través de operaciones sencillas y a continuación traspasarlo a la operatoria aritmética, casi siempre valiéndose de algún artefacto real o simbólico: el caso de las máquinas de multiplicar.

Hay varios libros publicados sobre ello y constituyen una propuesta didáctica valiosa.

Este enfoque, a distinción del anterior, prima los aspectos aritméticos del aprendizaje: sentido de la operación, algoritmo y cálculo.

Como en los casos anteriores, a excepción del primero, su práctica está lamentablemente poco extendida, a pesar de ser quizás el enfoque más dinámico y completo de los cuatro.

La práctica escolar y múltiples reflexiones y debates nos han llevado a la consideración de que los enfoques antes expuestos son parciales en tanto que parten de una visión estrecha de las operaciones a nivel infantil. Las propias dinámicas de las clases y el sentido de la didáctica que propugnamos nos conducen a un enfoque abierto, que se nutre de las aportaciones de los enfoques antes citados pero que no constriñe el aprendizaje a uno de ellos en exclusiva.

NUESTRA PROPUESTA

Queremos exponer una guía de construcción de la operación estructurada en seis fases ordenadas cronológicamente. Para la mejor comprensión de la misma es conveniente señalar que esta vía ha nacido en clases de organización abierta, de dinámica viva y sin utilización de textos de matemáticas.

El planteamiento teórico que la sustenta se encuentra expuesto en el capítulo II.

Las fases son las siguientes:

1.- SITUACIONES MULTIPLICATIVAS.

2.- CONVENCION COLECTIVA DE UNA REPRESENTACION GRAFICA Y UNA EXPRESION VERBAL.

3.- LAS TRES PARTES DEL PROBLEMA.

4.- REVERSIBILIDAD.

5.- SUSTITUCION DE LA REPRESENTACION GRAFICA POR LA NUMERICA.

6.- GENERALIZACION.

1.— SITUACIONES MULTIPLICATIVAS.

Como es habitual, para introducirnos en un nuevo campo de estudio, o en un nuevo concepto trataremos de partir de alguna situación apropiada que haya surgido en clase o bien que sea preparada por nosotros a propósito. Y si el tema es de larga duración, como es el caso que nos ocupa, no tendremos más remedio que procurar una motivación en los alumnos. Si, como ocurre con cierta frecuencia, son los mismos alumnos los que expresan su deseo de querer saber multiplicar, ya tendremos bastante camino andado.

Podemos comenzar problematizando situaciones sencillas, reales y representables. Pedimos, por ejemplo, que salgan cuatro voluntarios; bien, tenemos cuatro niños, cada uno tiene en su mano un lápiz, ¿cuántos lápices tienen entre los cuatro?. La respuesta parece obvia.

Sea otro problema. Los mismos cuatro chicos. Cada uno tiene dos ojos, ¿cuántos ojos en total?. O dos zapatos, dos manos... La respuesta no parece tan sencilla.

Podemos buscar otras situaciones. Tengamos tres alumnos; a cada uno le damos cuatro lápices que irán a meter en una caja ¿cuántos lápices hay ahora en la caja?.

El escollo que inicialmente aparece es lingüístico: la expresión **cada uno,** que es propia de este tipo de problemas.

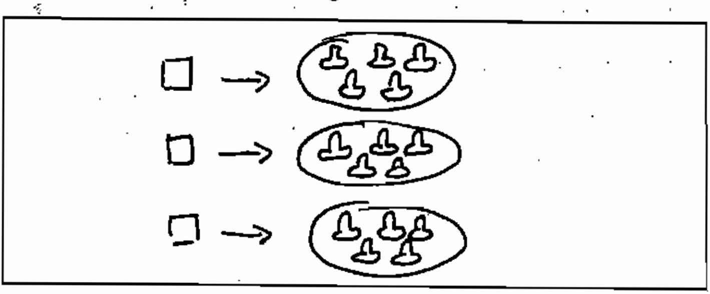
El término «cada», que está en expresiones como «a cada uno» «cada uno», «para cada uno», etc, es propio de situaciones de multiplicación y de división, como ya veremos e indica equidistribución. Para alcanzar su plena comprensión hemos de utilizar dos recursos:

— Representación gráfica de los problemas.
— Manipulaciones directas de material.

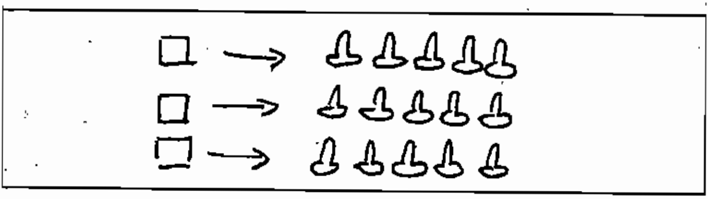
A la dificultad de la apropiación lingüística de éstas se une otra: la de calcular el resultado, hallar la respuesta al interrogante númerico del problema. Para superarla recurriremos a los recursos antedichos: grafismos y/o manipulaciones. Hagamos primero con las manos y luego «dibujemos» lo hecho.

Tengamos, por ejemplo, cromos y tapones de corcho para canjear unos por otros. Sea el problema: «Rosa tiene tres cromos. Cada cromo vale por cinco corchos. Averiguar cuantos corchos tendría Rosa».

Cada chico tiene sobre su mesa una cantidad de corchos para poder recogerlos y efectuar el problema. Después de algunos intentos y varios problemas similares se concluye en disponer el material de la siguiente forma:



o bien



El cálculo total lo efectuan espontáneamente por adición. Será útil cambiar de situación y de problemas, si bien estos han de ser elementales. Por ejemplo de este tipo, que habrán de resolver sin manipular material: «Aquí tengo tres cajas de lápices de colores y en cada una hay lápices. Averigua cuántos lápices de colores tengo».

Hay, sin embargo, muchos niños que necesitan un apoyo gráfico para la resolución de los problemas por lo que se hace necesario profundizar en lo gráfico.

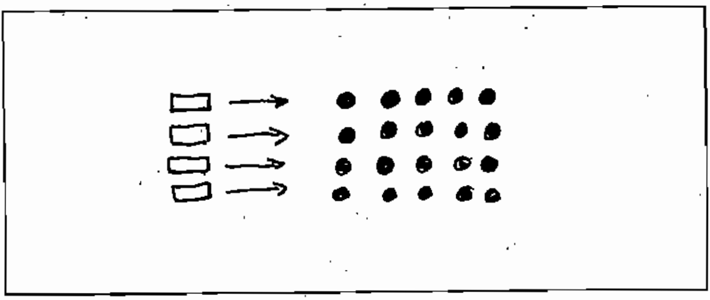
2.- LA REPRESENTACION DE LOS PROBLEMAS

Tratamos en esta segunda fase de resolver problemas, situaciones o «historias» pero ya sin manipular material, sólo dibujando.

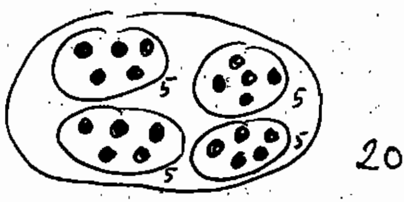
Cada alumno, va inventando un problema, o efectuándolo realmente. Los demás tratarán de hallar el resultado apoyándose en el dibujo del mismo, dibujo que vendrá a ser un trasunto de lo que anteriormente hicieron con el material.

Veamos este: «Daniel echa cuatro puñados de corchos en la caja. En cada puñado van cinco corchos. ¿Cuántos corchos hay ahora en la caja?».

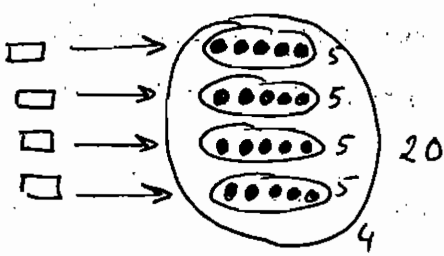
Habremos de ponernos de acuerdo en la representación. La representación estará en función del trabajo simbólico previo que hasta ahora hayan vivido los alumnos. En algunas aulas la representación convenida viene a ser de este tipo:



Hay aulas en las que a lo largo del Ciclo Inicial (la multiplicación se suele introducir al final de Ciclo) se ha profundizado en la matemática de conjuntos. En éstas se suele tener en cuenta la idea de conjunto y de conjunto de conjuntos. La representación que tienen estos problemas viene a ser así:



O bien, éste más expresivo:



Y se interroga a los alumnos sobre cuántos conjuntos hay, cuántos elementos tiene cada conjunto, cuántos elementos tiene el conjunto de conjuntos, etc. Como consecuencia de ello se favorece el que los alumnos hagan dos descubrimientos fundamentales:

1) Que todos los conjuntos deben tener el mismo cardinal para que el problema sea válido (que todos los montones deben ser equivalentes, que todos los cromos han de valer igual, etc).
2) Que hay tantos conjuntos como puñados, tantos conjuntos como cromos (ejemplo anterior).

Quizá pueda parecer que este enfoque conjuntista de iniciación a la multiplicación es artificioso. No es así. Por el contrario, se ha mostrado eficaz.

Hasta aquí sólo hemos expuesto la iniciación a la operación: situaciones o problemas simples -que resuelven por adición-, toma de contacto con la expresión lingüística de los problemas, convenir grafismos y representaciones que ayuden a visualizar el problema y resolverlos.

El paso siguiente será llegar a su estructura aritmética. Para ello:

— Habrá que analizar la estructura del problema.
— Crear un signo sustituto del operador.
— Por último, utilizar sólo signos.

3.- ESTRUCTURA DEL PROBLEMA

Todos los problemas tipo tienen tres partes:

CONJUNTO INICIAL	OPERADOR	CONJUNTO FINAL
(Tengo tres cromos)	(Cada uno vale por cinco corchos)	(Los tres cromos valen 20 corchos)

En otras palabras:

ESTADO 1	OPERADOR	ESTADO 2
Lo que hay El principio	La acción Lo que hay que hacer La operación	El resultado La respuesta a la pregunta

Es bueno escribir los problemas en viñetas. Veamos uno.

«Juán tiene tres cromos. Cada cromo vale por cinco corchos. ¿Cuántos corchos obtendrá Juan por sus cromos?».

Cada parte del problema es claramente una oración, «como una foto». Entonces el problema se puede escribir así:

ESTADO 1 OPERADOR ESTADO 2

a) 

y se puede representar así:

ESTADO 1 OPERADOR ESTADO 2

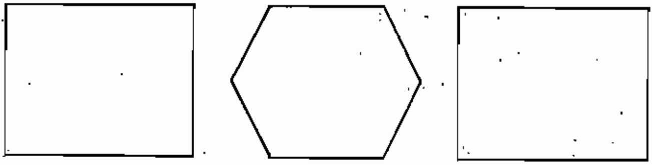
b) 

Conviene hacer práctica de la escritura de problemas en viñetas; primero a nivel escrito como en a); luego a nivel semiescrito en b).

Llegados a esta fase deberemos suprimir alguna de las tres partes del problema en ejercicios como los siguientes, parte que debe ser completada por el alumno.

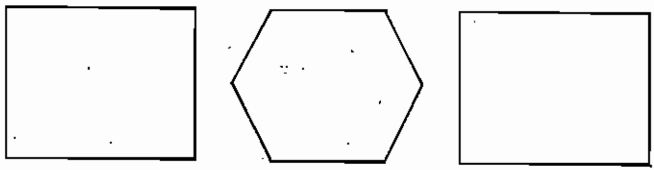
1.— 

2.—



3.—

4.— Inventa un problema y dibújalo.



Obviamente esta fase no puede alargarse demasiado. Cuando los chicos han comprendido la estructura de los problemas surge la necesidad de abreviar y sustituir las representaciones y palabras por algo más breve.

4.— EL SIGNO

Propondremos entonces que bajo las viñetas coloquen los números que correspondan

Pero cómo indicar lo que hacen las gallinas; cómo representar el operador; cómo sustituir el término «cada», «cada una». Con seguridad los alumnos proponen signos diversos para sustituir las palabras del operador. O bien se aceptan y se selecciona uno de ellos y durante un tiempo -hasta cambiarlo por el singo estandar- se opera con él. O bien se introduce el conocido X «por», pues ahora sí tendría pleno sentido y significado ese signo.

4 x 3 = 12

El ejemplo anterior sería así:

4   x 3   12

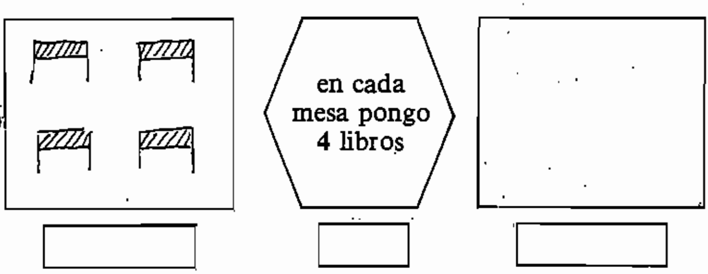
Hemos conseguido un esquema similar al de la suma y la resta:

4 x 3 = 12

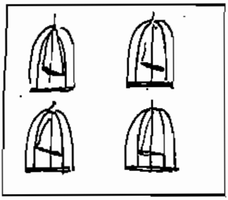
Debemos alternar ahora la resolución de problemas a tres niveles: real, gráfico y numérico, individualizando el trabajo y profundizando en matices que en las sesiones colectivas no hayan aparecido. Véanse algunos modelos:

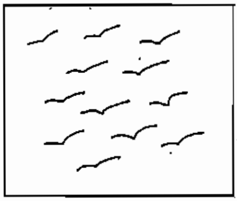
Copia y completa lo que falta. Debajo escribes el problema con números.

a)



b)



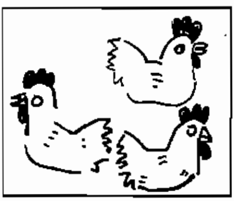


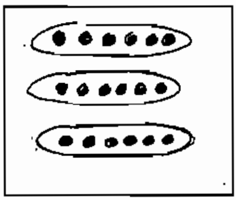
c)

x.6

= 30

d) Yo te dibujo un problema. Tú lo escribes con palabras y completas.





e) Ahora yo te escribo un problema y tú lo dibujas.

Tengo cuatro cajas de rotuladores.
En cada una hay seis rotuladores.
En total tengo .... rotuladores.

f) A ver cómo dibujas este problema. Después lo escribes con números.

Tengo cuatro rotuladores. Cada rotulador vale por seis lápices. En total tendré... lápices.

g) Ahora yo te escribo un problema con números y tú lo escribes con palabras.

$$\boxed{3 \times 6 = 18}$$

h) Inventa un problema y a ver si eres capaz de de dibujarlo de escribirlo con palabras y luego con números.

5.- LAS TABLAS DE MULTIPLICAR.

Generalmente las tablas se suelen presentar a los alumnos como algo ya confeccionado y dispuesto para ser memorizado. A base de repetición y trucos mnemotécnicos logran aprenderlas, lo que no evita que queden olvidadas pasado algún tiempo.

Contrariamente a ese enfoque proponemos que las tablas sean construídas en clase. La construcción de una tabla permite descubrir el «truco», la estructura de su formación, lo que ayuda a su fijación memorística. Además de que es divertido.

La construcción colectiva de las tablas conviene hacerlas cuando los alumnos han interiorizado el significado de la expresión aritmética, es decir, después de la fase de iniciación (simbolización) de la operación.

He aquí una forma atractiva: Salen dos chicos que se colocan frente a los demás. Los otros deberán ir escribiendo «con signos y números» lo que haremos. El maestro da a cada uno, uno ¿cuántos cromos tendrán entre los dos? A continuación da a cada uno dos, a cada uno tres, a cada uno cuatro, etc.

La escritura y lectura se hará según convenciones anteriores. Así:

2 x 1 = 2
2 x 2 = 4
2 x 3 = 6
....

¿Qué significa «2 x 3»?: que hay dos niños y cada uno tiene tres cromos.

Algunos descubrirán que los resultados van aumentando de dos en dos: 2, 4, 6, 8, 10 ... los cuales no necesitarán que se sigan dando cromos a sus compañeros y podrán continuar solos la confección de la tabla. Pero para la mayoría de los alumnos se hace necesario vivir experiencias variadas, aunque similares a las antes expuestas. Veamos algunas:

I) Botes de yogur.

3 botes, en cada uno hay dos chapas.
3 botes, cada uno tiene 4 chapas.

II) Cajas de lápices de colores.

4 cajas, cada una tiene 1 lápiz...

Es indispensable construir las primeras tablas mediante experiencias reales. Si el «truco» de la tabla está descubierto, ya no será necesario realizar experiencias para las demás tablas, siempre que lo descubierto sea:

— Que se va aumentando aditivamente: de 3 en 3, si es la tabla del 3; de 4 en 4 si es la del 4, etc.

— Que la tabla no termina en «por diez» sino que puede continuar indefinidamente.

Lo necesario ahora es la memorización progresiva de las primeras tablas, para lo cual la tradición pedagógica ha ido acumulando una enorme variedad de ejercicios y juegos. Veamos algunos ejemplos:

a) Completar series ascendentes de múltiplos.

4, 8, 12, ...

b) Series descendentes.

48, 44, 40, ...

c) Escribir la tabla en sentido creciente y decreciente.

4 x 0 = 0	4 x 11 = 44
4 x 1 = 4	4 x 10 = 40
4 x 2 = 8	4 x 9 = 36
....	....

d) Hacer los mismos ejercicios pero a nivel exclusivamente verbal.

e) Competiciones entre equipos, o entre dos alumnos.

Por ejemplo, se escriben en papeletas las expresiones de la tabla de un número con un resultado por detrás. El juego es entre dos alumnos. Uno toma las papeletas y va preguntando al otro. El otro se queda con las papeletas que acierte. Gana el que más acierta.

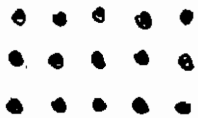
La memorización de las tablas, aunque exija previamente su comprensión, es un trabajo de ejercitación memorístico que suele ser de larga duración. Cada alumno tiene sus propios recursos mentales para interiorizar la tabla. Se da el caso de alumnos que conocen las tablas pero son incapaces de resolver problemas.

Ya sabemos que recitar las tablas no es multiplicar, sino un recurso que agiliza el cálculo y favorece la resolución de problemas, pero nada más.

III) Hay experiencias que favorecen la comprensión de las tablas y agilizan el cálculo. Por ejemplo, las siguientes tendentes al descubrimiento de la commutatividad.

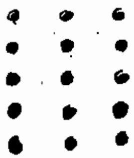
a) Colocación de materiales. Puede tener cada alumno un conjunto de 15 corchos para colocarlos en filas y columnas. Descubrirán que sólo caben 4 posibilidades:

— Tres filas de 5 corchos cada una, con lo que salen 5 columnas.



Y su expresión numérica será 3 x 5.

— Cinco filas, cada una de tres corchos con lo que quedan tres columnas.



Y su expresión numérica es 5 x 3

Curiosamente 3 x 5 y 5 x 3, siempre obtenemos 15. No podemos obtener otro resultado. Son dos situaciones diferentes.

A nivel real 3 x 5 (tres filas, cada uno con 5 corchos) no es igual que 5 x 3. A nivel numérico si.

La conmutatividad es una propiedad aritmética, es decir, a nivel numérico pero no a nivel real.

Algunos alumnos descubren que también es posible colocar todos los corchos formando una sola fila, es decir, 1 x 15 (una fila de quince) e inversamente quince columnas de un elemento, o sea, 15 x 1.

Experiencias de este tipo ayudan tanto a la comprensión de las operaciones como a la memorización de las tablas.

b) Vasos y lápices

Los alumnos juegan de dos en dos. Material: vasos y lápices. El primero (alumno A) tendrá tres vasos, por ejemplo, para ir metiendo en ellos lápices progresivamente, según las consignas del maestro. El otro alumno (B) comenzará entonces por dos vasos (tantos como lápices comience a colocar el otro) y realizará la orden del profesor a continuación del alumno A. Habrá que ir escribiendo cada acción que se haga y comparar las escrituras numéricas resultantes con las diferentes disposiciones del material en cada caso.

Veamos un ejemplo:

ALUMNO A	ALUMNO B
3 vasos; en cada uno 2 lápices 3 x 2	2 vasos en cada uno 3 lápices 2 x 3
3 vasos; en cada uno 3 lápices 3 x 3	3 vasos; en cada uno 3 lápices 3 x 3
3 vasos; en cada uno 4 lápices 3 x 4 = 12	4 vasos en cada uno 3 lápices 4 x 3 = 12
3 vasos; en cada uno 5 lápices 3 x 5 = 15	5 vasos; en cada uno 3 lápices 5 x 3 = 15
....	....

En experiencias similares va apareciendo un matiz de suma importancia que diferencia a la adición de la multiplicación: para calcular el resultado, suman, unen mentalmente las cantidades, pero, de hecho, un número se refiere a conjuntos y otro a los elementos que tiene cada conjunto.

Así en 3 x 5, calculan pensando 5 + 5 + 5, y en 5 x 3 será 3 + 3 + 3 + 3 + 3. Ciertamente en la adición sumamos cardinales del mismo nivel: cinco se refiere a los elementos de cada conjunto, es decir, es el cardinal de cada conjunto. De la misma manera 3 es el cardinal de cada conjunto en el ejemplo del otro alumno. Sumamos cardinales.

Pero en la multiplicación, en 3 x 5, un número (3) indica los conjuntos que hay, los montones, las partes..., y el otro los elementos (5) de cada conjunto. La comprensión de la operación no puede pasar por alto esta evidencia si se quiere que los alumnos no identifiquen sumar con multiplicar.

En las multiplicaciones operamos simultaneamente con datos de dos niveles, mientras que en la suma siempre permanecemos en el mismo nivel.

Frecuentemente los alumnos padecen las consecuencias de la falta de claridad conceptual por parte nuestra, de los maestros.

Un caso típico es éste: un niño se enfrenta al problema: «Un chicle vale 8 ptas, si vas al quiosco y compras 4 chicles, ¿cuánto gastas?».

No halla la forma de resolver la incógnita. El maestro trata de explicarle o de ponerle en situación de que comprenda, pero viéndose en la imposibilidad de conseguirlo, acaba por decir: «pues mira, multiplica los chicles por las pesetas».

Hechos como este se nos dan con frecuencia. Hemos de ser conscientes de que con ellos no conseguimos que el chico «vea» lo que ha de hacer, sino que además le ocultamos el verdadero trasfondo de la cuestión.

IV) Casos graciosos.

¿Por qué cuatro por cero es cero?.

Hagamos experiencias, dibujemoslas, o representémoslas con números.

a) Salen cuatro chicas. A cada una doy 3 cromos. Su representación es ya conocida:

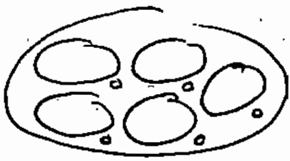
4 x 3 = 12

Pero ahora cambiamos. Están las cuatro chicas. A cada una le doy ningun cromo, es decir, no les doy cromos. Su representación choca al principio, pero se comprenderá que es:

4 x 0 = 0 (4 chicas; cada una tiene 0 cromos).

b) Dibujemos otro problema. En un árbol hay cinco nidos. En cada nido no hay ya pájaros. ¿Cuántos pájaros hay en el árbol?.

A nivel aritmético está claro que es cinco por cero.
A nivel conjuntista tendremos cinco conjuntos vacíos.



c) Si invertimos los problemas anteriores obtendremos casos absurdos a nivel real.

En resumen, el aprendizaje de las tablas no debe reducirse a la memorización de las mismas. Ha de ser un proceso rico en experiencias y problemas, que provoque la comprensión de la operación, y ello, a fin de cuentas, redunda en beneficio del propio alumno, aunque tenga como contrapartida que la memorización sea más lenta.

Vamos a adjuntar la narración de una experiencia al respecto llevada a cabo en un aula compuesta por alumnos de tercero, cuarto y quinto cursos, que creemos es ilustrativa.

> *En nuestra clase hemos dedicado un trimestre a profundizar en la multiplicación y en la memorización de las tablas con un sistema de trabajo elástico y abierto pues mientras que unos alumnos se encontraban en el nivel de iniciación otros operaban ya sin dificultad.*
>
> *Las actividades que hacíamos encaminadas a memorizar las tablas eran de tres tipos:*
>
> *a) Juegos.*
>
> *b) Ficheros de problemas y fichas preparadas por mí con problemas y ejercicios que incidían sobre experiencias realizadas en clase sobre conmutatividad, contabilidad, estados y operadores.*
>
> *c) Pruebas.*
>
> *Explicaré brevemente cada uno de los tres grupos.*

A. JUEGOS

De los seis o siete juegos diferentes que iban encaminados exclusivamente a la retención de las tablas expondré los tres que contaban con mayor aceptación:

a) Los dados. Tres jugadores: dos compiten y otro es el juez encargado de comprobar sobre una tabla la verdad o falsedad de las respuestas. Dos dados; en uno están escritos 6 números cualquiera (menores de 13) uno en cada cara. En el otro dado hay también 6 números (inferiores a 11) que hacen de operadores.

El jugador que va de mano lanza su dado; el otro jugador que va de mano debe decir la respuesta y el juez verá si es o no correcta. Alternativamente deben decir las respuestas un jugador u otro. El juego es a diez tiradas o a las tiradas que los jugadores quieran establecer. Gana el que menos errores tenga.

Unos dados son más difíciles que otros según sean números «bajos» ó «altos». Los jugadores escogen los dados con los que van a competir.

b) El sobre. En un sobre hay metidos 20 cartoncitos en los que está escrita una multiplicación por una cara y por la otra su respuesta de la siguiente forma:

3 x 6	18
as	envés

Todos los cartoncitos de un mismo sobre se refieren a una tabla: el sobre de la tabla del 2, el de la del 3, etc. Dos jugadores. Uno tiene del sobre; saca un cartoncito y lee la pregunta. El otro contesta y el primero comprueba por el envés si es correcta la respuesta. Si es correcta se queda el cartoncito.

El juego consiste en ser capaces de acertar los veinte cartones.

c) El cofre de los piratas. De tres a cinco jugadores. Material diverso: gomas, lápices, chapas, corchos, etc. Una tabla en la que este escrito el valor de cada objeto como la siguiente

OBJETOS	PUNTOS
corcho	7
chapa	6
chapa coca-cola	9
....	....

El material está dentro de una bolsa o en una caja con tapadera. Los piratas van a repartirse el botín. Un jugador mete su mano en la bolsa y coge unas cuantas cosas (no más de cuatro). Las muestra; ahora debe hallar el valor de lo que ha cogido y lo apunta. Otro jugador hará lo mismo y así los demás hasta agotar el botín contenido en la bolsa. Gana el jugador que más puntos obtenga.

B. FICHERO DE PROBLEMAS

Este ha resultado ser muy útil. Por otro lado las fichas sueltas que yo preparaba tenían la particularidad de ser casi todas autocorrectivas tanto para estimularles a ellos como para evitarme yo la imposibilidad de corregir uno a uno. Sin embargo algunas de ellas no eran autocorrectivas con el fin de poder intervenir yo en la corrección.

C) PRUEBAS

Cuando alguno consideraba que ya había automatizado una tabla y quería comprobarlo debía pasar tres pruebas conmigo. La primera de ellas consistía en ju-

gar a «el sobre». Si la superaba pasaba a la prueba segunda, la del «librito» (para cada tabla tenía preparado un librito consistente en unas cuantas fichas grapadas con problemas sencillos y ejercicios de cálculo del número que fuese). Así, si un alumno quería demostrar, demostrarse o superar la tabla de cuatro, por ejemplo, cogíamos el sobre del 4 y a continuación hacía el librito del 4.

Superada la segunda prueba pasabamos a la última, la más difícil, la de las «cuatro preguntas». Había que decir:

— La tabla del 4 (por seguir con el ejemplo anterior).
— Los múltiplos de 4 en orden creciente.
— Los múltiplos de 4 en orden decreciente.
— La tabla del 4 en orden decreciente.

Aquel que superaba las tres pruebas era aplaudido y ya podía dedicarse a otra tabla, la que quisiese.

SIMULTANEIDAD DE LAS DOS OPERACIONES

Podría pensarse que no debería iniciar el aprendizaje de la división hasta tanto los alumnos no tuviesen perfectamente asimilada la multiplicación. No es así. Se ha constatado que una operación va indisolublemente unida a la otra. Más aún, que no se comprende realmente la multiplicación sin conocer la división e inversamente, no pueden aprender a dividir sin multiplicar. Son como dos caras de la misma moneda.

Multiplicar y dividir constituyen un campo nuevo de operaciones para los alumnos, quienes estaban acostumbrados a la suma y a la resta. En lugar de hablar de multiplicación y de división deberíamos usar el término operaciones multiplicativas con el fin de englobarlas y diferenciarlas: son fundamentalmente operaciones de equidistribución (de ahí la expresión «cada») y cuyo matiz diferenciador de las aditivas es que utilizan datos de dos niveles simultaneamente. Ya hemos mencionado algo de esto anteriormente y volveremos sobre ello en el capítulo dedicado a la divisón.

Compartimos la opinión no muy generalizada por cierto, de que multiplicación y división han de tratarse sistemáticamente y progresivamente, pero no por separado, sino al mismo tiempo. La tradición y la inercia pedagógicas actúan en contra: primero se enseña a multiplicar y luego a dividir, pero no hay razones suficientes para no invertir el orden y simultanear ambas.

De cualquier modo, una vez comprendida a niveles iniciales la multiplicación y avanzado algo el proceso de construcción de las tablas, parece inevitable dedicarse por un tiempo al aprendizaje sistemático de la división, con el fin de que la profundización, extensión y generalización de ambas operaciones corran parejos y de modo global. Lo que no obsta para que matices y casos particulares de cada operación se traten puntualmente y por separado.

PROFUNDIZACION

La profundización de la operación hasta su completo dominio tradicionalmente se programa para los cursos tercero y cuarto y adquiere un enfoque academicista: «en III damos hasta aquí y en IV.° daremos lecciones». No parece que ese sea un enfoque idóneo.

Por el contrario en la didáctica que propugnamos se contempla que, superada la fase de iniciación independientemente de que ésta se lleve a cabo en segundo curso o en segundo y tercer cursos, se profundice trabajando núcleos temáticos o campos de operaciones en lugar de lecciones escalonadas.

Convendría sustituir las lecciones por experiencias globales que abarquen diversos aspectos matemáticos, sin perjuicio de tratar ciertos matices con experiencias puntuales. Más adelante exponemos algunas. Así mismo deberíamos de ir disminuyendo la cantidad de ejercicios repetitivos y fichas de deberes en favor de útiles como el fichero autocorrectivo de problemas, libretas de cálculo autocorrectivas, libretas de cálculo programadas al estilo de los que ha editado el M.C.E.P. a través de la editorial Escuela Popular, juegos y experiencias concretas.

Y por último, no deberíamos olvidar que es mucho más positivo que sea el alumno quien descubra, «vea», «se dé cuenta», por lo que no estaría nada mal que fuesemos dejando a un lado nuestra acendrada postura de explicar o «dar la lección».

Exponemos a continuación los núcleos temáticos que consideramos fundamentales.

I. PRODUCTO CARTESIANO.

La experiencia sobre producto cartesiano puede ser modélica. Para no ser reiterativo no incideremos en ella. Unicamente dos observaciones sobre la misma:

—Es recomendable el enfoque experimental e investigador, tal como se cuenta en la narración de la misma.

— La experiencia puede ser más variada y profunda: depende del nivel de los alumnos.

II.- OPERADORES MULTIPLICATIVOS

Con este núcleo se trata de descubrir o en otros casos afianzar determinados matices de la operación. El adoptar la perpectiva de estados-operadores le da cierto aire lúdico al trabajo. Recuérdese que la noción de operación ya se trató en la iniciación.

Veámos algunos juegos y experiencias.

a) Por turnos, un alumno dice un número; otro alumno, un operador. Los demás escriben, efectuan la operación.

b) Uno dice un número. El maestro, el resultado. Los demás escriben y hallan el operador. Las escrituras son de este tipo:

4 x ... = 20

Juegos como los anteriores permiten ejercicios individuales como los siguientes:

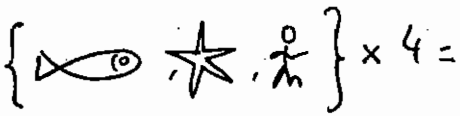
ESTADO 1	OPERADOR	ESTADO 2
4	x 6	= .....
6	.....	= 42
...	x 5	= 20
...	...	= 15

c) Inventar problemas colectivamente. Un alumno dice el estado inicial, lo que hay, por ejemplo: «hay 5 niños». Otro el operador, lo que pasa: «cada una tiene 10 dedos». El tercero ha de exponer la pregunta del problema. los demás hallan la solución.

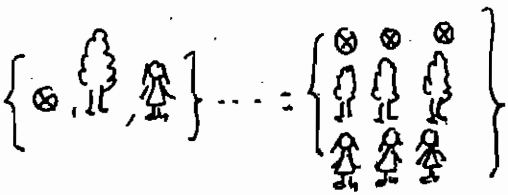
d) Uno dice un conjunto de cosas. Otro le aplica una operación.

Aquí caben ejercicios curiosos y que provocan discusiones interesantes. Veamos un par de ellas:

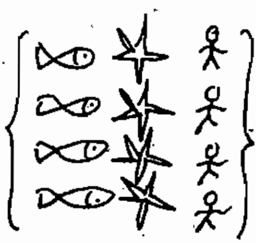
a) Dibujar el conjunto resultante.

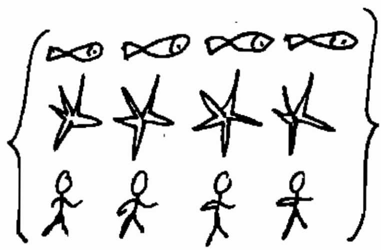


b) ¿que he hecho?.



Sin duda el ejercicio a) admite diferentes respuestas; he aquí dos de ellas:





¿Cuál es correcta? Correctas son las dos y otras ordenaciones posibles. Las discusiones se entablan acerca de que «es lo mismo que repetir cuatro veces el conjunto que había» «no, es que de cada uno salen 4»; «da el mismo resultado siempre» etc. Efectivamente es como repetir varias veces el conjunto inicial.

Las discusiones que surjan pueden servir para plantear problemas de este tipo:

«En este bolsillo tengo 8 duros, pero en el otro tengo tres veces lo que en este».

«Sonia tiene 9 años. Su madre tiene como tres veces la edad de Sonia ¿Cuántos años tiene la madre?

Para concluir este punto recomendamos la lectura de la bibliografía sobre el tema que al final del capítulo citamos.

El trabajo personal o en pequeño grupo sobre ejercicios y problemas a posteriori de los juegos y/o experiencias colectivas resulta ser indispensable en este punto. Adjuntamos algunos ejercicios seleccionados de entre los realizados en un aula de III curso.

Los estados están en los cuadrados. En los círculos pones el operador que corresponda pero que sea de multiplicar.

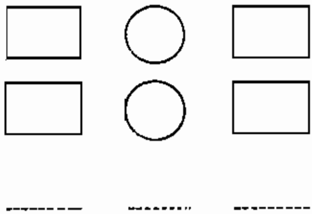
1)

E1	OP	E2
3	x5	15
3		18
3		4
....	....	....

4		28
10		110
7		42
....	....	....

Yo te pongo el estado 1 y el operador. Tú pones el estado 2.

2)



Ahora sólo te pongo el estado 2. Tú tienes que inventar el estado 1 y el operador que corresponda.

3)

5	x5	25	______	______	90
______	______	24	______	______	100
______	______	16	______	______	0
______	______	81	______	______	1
....	....	....	....	....	....

Estas son cadenas de operadores de multiplicar. Yo escribo los estados y tú los operadores.

4)

	E.1	OP	E.2	OP	E.3	OP	E.4
*	2		4		12		24
*	1		5		10		40

Encuentra el truco y sigue el orden.

5)
* 7, 14, 21, ..., ..., ...,
* 8, 16, 24, ..., ..., ...,

En este busca el operador y escríbelo.

6) 3 ... 6 ... 12 ... 24 ... 48 ...

Esta flecha ⟶ significa:
«es cuatro veces mayor que»
Escribe el número que falta.

7)
12 ⟶ ----
20 ⟶ ----
8 ⟶ ----

Este triangulo △ es un operador que indica x 6. Completa lo que falta.

8)
5 △ = ...
6 △ + ... = 40
20 - 10 △ = ...

A ver si eres capaz de descubrir lo que significa este operador * en cada caso. Puede tener varios significados.

9)
7 + 1 * = 16
4 * = 4
10 - 5 = 3 + 2 *
60 = 10 *

En otra aula una experiencia con balanzas fue aprovechada también para el trabajo escrito de operadores, lo que permitió a los niños llegar a hacer, además de ejercicios como los anteriores, otros ciertamente complicados. De las fichas de realización individual transcribimos algunos extractos.

Yo escribo lo de un plato; tu lo del otro poniendo el estado y el operador que quieras.

1)

E.	OP.		E.	OP.
3	x4	=	....	....
10	+2	=	....	....
15	-5	=	....	....
...	....	=	20	x0
...	....	=	5	x8
20	: 2	=	...	....

En este te toca poner a tí nada más que el operador de un plato. Procura que sea de multiplicar.

2)

$$10 + 10 = 10 \ldots.$$
$$6 \times 3 = 3 \ldots.$$
$$50 - 10 = 8 \ldots.$$
$$50 - 10 = 5 \ldots. - 5$$
$$4 \times 6 = 5 \ldots. + 4$$

Yo escribo lo de un plato y tú lo del otro pero de tres maneras distintas.

3)

$$20 - 5 = \ldots..$$
$$= 4 \times 7$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En esta misma aula el trabajo de operadores y de transcripción numérica de «historias» ó problemas tuvo continuación con el de paréntesis. El paréntesis apareció por necesidad de cortar temporalmente o separar partes de las historias. Hay que advertir que los niños usaban líneas verticales de separación en sus simbolizaciones primeras. El maestro aprovechó este hecho para llegar al paréntesis. Veámoslos con ejemplos. Se trata, como ya vimos en el capítulo de la suma, de representar o mimar realmente una «historia» ó una acción y a continuación transcribirla simbólicamente y viceversa.

— Llevo en mi mano tres cajas de seis rotuladores cada una. Luego me encuentro tres rotuladores.

Su escritura artimética vendrá a ser $(6 \times 5) + 3$ y el paréntesis separa lo que en principio llevaba de lo que luego me encontré.

—En una bolsa un niño echa 4 puñados de tres garbanzos. Llega otro y saca de la bolsa 6 garbanzos. ¿Cómo sabremos los garbanzos que quedan?. Su escritura aritmética nos puede ayudar: $(4 \times 3) - 6$.

De los hechos reales podemos pasar a los ficticios:

—Un hombre tiene en su casa 4 jaulas de canarios y en cada una hay 3. Además tiene 2 jaulas con 5 gilgueros cada una;

también tiene 2 palomas. ¿Cómo averiguar todos los pájaros que tiene en su casa?.

Aquí la expresión numérica no es ya sólo una transcripción simbólica de la «historia» sino también una apoyatura para poder contestar al interrogante planteado:

$$(4 \text{ x } 3) + (2 \text{ x } 5) + 2 = 24$$

Pasando por las fases descritas en los capítulos IV a) y IV b) llegan los alumnos a interesantes cuestiones numéricas. Transcribimos algunos extractos de los materiales de trabajo individual en orden de progresiva dificultad.

Lee esta historia:

Un árbol tiene 5 ramas. A cada rama llegan 4 pájaros.
En el árbol hay ..... pájaros.
Escríbela con números.

1) Ahora te cuento la historia partida.

Un árbol tiene 5 ramas. A cada rama llegan 2 pájaros. Pero luego llegan también a cada rama 2 pájaros más.

— ¿Habrá ahora en el árbol los mismos pájaros que en la primera historia?.
— ¿Cómo escribirías con números esta historia?.

---

2) Sorkunde tenía 4 cajas de rotuladores. En cada caja había cinco rotuladores. Pero un día su madre le regaló dos cajas más.
A ver cuántos rotuladores tiene ahora Sorkunde.

---

3) Inventa un problema para esta expresión:

$$(3 \text{ x } 5) + 6$$

Escribe este problema con números:
Hay 3 mesas. En cada mesa pongo 5 libros.

4) Ahora tienes que partir la historia y las cuentas con paréntesis.

—¿ Qué has partido, el estado o el operador?.
— ¿ Podrías partirla de otra manera y escribirla?.

Fíjate cómo escribo yo los problemas con paréntesis.

est.	op.		est.	op.		est.	op.
3	x 4	=	(3	x 2)	+	(3	x 2)
2	x 5	=	(2	x 4)	+	(2	x 1)

5) — ¿Qué he partido, el estado o el operador?

— Si sumas los operadores de la historia de paréntesis. ¿ Vuelves a tener el operador de la historia que no lleva paréntesis?.

---

6) Escribe con paréntesis la historia que yo te pongo.

3 x 4 =
4 x 5 =
....
....

---

7) Ahora vas a hacerlo al revés. Yo escribo con paréntesis y tú sin ellos. Fíjate en el primero.

(4 x 2) + (4 x 3) = 4 x 5

(5 x 1) + (5 x 2) =
(4 x 2) + (4 x 2) =
....
....

---

8) A ver si sabes el operador que falta.

4 x .... = (4 x 2) + (4 x 3)
2 x .... = (2 x 3) + (2 x 3)
5 x .... = (5 x 2) + (5 x 2) + (5 x 1)
3 x .... = (3 x 1) + (3 x 1) + (3 x 1)

9) Escribe los operadores que faltan dentro de cada paréntesis.

5 x 4 = (5 x ...) + (5 x ...)
3 x 6 = (3 x ...) + (3 x ...) + (3 x ...)
3 x 6 = (3 x ...) + (3 x ...)
3 x 6 = (3 x ...) + (3 x ...) + (3 x ...) + (3 x ...)

---

10) Yo lo escribo todo pero no pongo paréntesis en el lado derecho.

Intenta ponerlos tú.

5 x 4 = 5 x 1 + 5 x 2 + 5 x 2
2 x 5 = 2 x 3 + 2 x 2
6 x 4 = 6 x 2 + 6 x 2
3 x 6 = 3 x 2 + 3 x 2 + 3 x 2

---

11)

Acuérdate de la balanza.

Yo escribo un plato con paréntesis.

Tú el otro sin ellos pero de dos maneras: una multiplicando y la otra sumando.

Fíjate en cómo lo hago yo:

(4 x 2) + (4 x 3) = 4 x 5 ó También a 8 + 12

Ahora haz tú las que siguen:

((4 x 3) + (4 x 1) =
(5 x 2) + (5 x 2) =

Yo escribo en un plato. Tú en el otro pero con paréntesis y haciendo las partes que quieras.

12)

4 x 5 =
4 x 6 =
4 x 7 =
4 x 10 =
5 x 5 =
3 x 6 =
3 x 4 =

III) EL SISTEMA DE NUMERACION

El conocimiento de la estructura de nuestro sistema numérico es indispensable para que los alumnos avancen en la asimilación y uso de las operaciones aritméticas. Tal es su importancia que en la década de los 60 aparecieron tendencias preconizando el aprendizaje del sistema de numeración en bases diferentes a la 10. Algunos incluso proponían (se han realizado experiencias) comenzar el aprendizaje de los números por bases menores de la de diez aunque fuese ésta la utilizada.

El tema suscitó duras polémicas y las sigue suscitando en la actualidad. Desgraciadamente no poseemos un estudio y evaluación experimental comparativa sobre aulas que hayan iniciado desde preescolar la numeración en otras bases, por lo que es difícil pronunciarse al respecto. Nuestra postura puede deducirse de la lectura de la experiencia: «Investigar el truco de los números», que debido a su extensión incluímos por separado más adelante, al final del capítulo.

IV) LOS ALGORITMOS

Por tradición la mayor parte del tiempo escolar dedicado al aprendizaje de la multiplicación, se destina a hacer cuentas y a la ejercitación en la mecánica calculatoria.

La cuenta suele enseñarse directamente y, a fuerza de repetición, el alumno va memorizando el modo de resolverla, pero ignora totalmente el porqué de operar así. Las consecuencias negativas de este modo de proceder son conocidas sobradamente.

Está claro que la didáctica del algoritmo debe enfocarse en otro sentido. Admitiremos previamente:

— Que no tiene por qué haber un único modelo de resolver las cuentas.

— Que favorecemos la creatividad y la búsqueda personal si provocamos que los alumnos descubran modos de resolver las operaciones.

—Que la enseñanza directa del algoritmo impide la investigación del que aprende.

En consecuencia nuestra estrategia consistirá en invertir la didáctica habitual y proceder con el mismo estilo que lo hemos hecho para las otras operaciones.

Una cuenta ó algoritmo no es más que un truco numérico para hallar la solución del problema. Lo fundamental es el razonamiento que se haga para resolver el problema. La cuenta, una herramienta de la que echamos mano. Su aprendizaje no podemos desligarlo del problema, aunque más tarde hagamos a los alumnos que se ejerciten en la ejecutoria de cuentas. La cuenta, aislada, fuera del problema, no dice nada.

En las aulas en las que se trabaja según el enfoque didáctico que venimos explicando, las cuentas aparecen por necesidad del problema que se esté resolviendo. Los casos, que son los tratados hasta aquí (fase de iniciación) en los que el multiplicando y el multiplicador son de una cifra, hemos preferido tratarlos como escritura aritmética de problemas ó situaciones adoptando la linealidad horizontal:

$$4 \times 5 = 20$$

Pero en el nivel de profundización de la operación, aparecen problemas, en los que hay números de más de una cifra.

Entonces se hace necesario distinguir entre problemas y cuenta y conviene, si así lo indica el nivel de los alumnos, realizar un trabajo sistemático y continuado del aprendizaje de las cuentas.

Podemos comenzar con algunas experiencias motivadoras. Veamos una de una clase de tercer curso:

> *«Estamos ya a mediados del segundo trimestre y me parece que ha llegado el momento de intentar resolver algunos problemas que a menudo se nos han presentado y se nos presentan, cuya solución se ha visto necesaria, pero yo había soslayado intentarla colectivamente.*
>
> *Por ejemplo, los encargados de la cooperativa tienen el problema de saber cuánto dinero ha entrado a la semana (hay 19 chicos y cada uno trae semanalmente 15 pesetas). Lo mismo sucede en situaciones cuando vamos a comprar los lápices gomas u otro material colectivo.*
>
> *Un día, aprovechando que durante el recreo iremos a comprar para reponer material de la cooperativa de clase, propongo que las cuentas de la tienda la hagamos nosotros. Es aceptado pero ¡cómo haremos las cuentas!. Propongo agruparnos en cuatro conjuntos y a cada grupo doy un problema. Hay que buscar cómo resolverlo con números y luego decirlo a los demás.*
>
> *Grupo I: resolver el problema de los lápices (solemos comprar 24 lápices a 12 pesetas el lápiz).*
>
> *Grupo II: calcular el dinero que traemos cada semana.*
>
> *Grupo III: Calcular las baldosas del suelo de la clase.*
>
> *Grupo IV: Calcular cuántos alumnos hay en el colegio (hay 8 aulas y en cada aula ponemos 24 alumnos).*
>
> *Después de una media hora aproximadamente, empezamos a poner en común los resultados. Aparecieron cosas interesantes:*
>
> *— Todos los grupos han recurrido a la multiplicación como «truco» para resolver el problema. Ya sa-*

ben que cuando multiplicamos operamos con números y no con las cosas. De modo que no es 4 lápices por 12 pesetas sino 4 x 12).

— La mayor parte de ellos han intentado hayar el resultado recurriendo a descomposiciones y valores posicionales.

— Pero ningún grupo ha logrado averiguar ningún modo de resolver tal tipo de multiplicaciones excepto el cuatro. Ante esa imposibilidad dos grupos regresaron a resolver mediante sumas.

— Dos o tres individuos de clase «sabían» hacer este tipo de multiplicaciones pero no sabían explicar qué es lo que realmente hacían o por qué.

— En mi opinión esto muestra la complejidad de la multiplicación por dos o más cifras y que la fórmula estandar es demasiado sintética e incomprensible a primera vista.

— La experiencia ha despertado interés por saber hacer problemas difíciles, «como los mayores». Durante unos días dedicaremos el tiempo a eso.

— Al día siguiente preparé el material multibase de base 10 y les expliqué que antes de hacer las cuentas de números, sería mejor que las hiciéramos con el material. El material ya lo conocían y también los distintos valores posicionales de las cifras y de las piezas.

— Yo doy las consignas y ellos las ejecutan con el material. Las consignas eran así:

— «Poned con el material el número 13. Multiplicarlo por 5».

Después explicaban cómo lo hacían.

«Ahora poned el 25 y lo multiplicais por 4».

Las consignas iban siendo cada vez más difíciles pero no en todas el operador era de una cifra. Ningún niño quedó sin saber hacer las multiplicaciones.

Habia dos maneras de hacer:

— Una, mayoritaria, cuya expresión era ésta. Por ejemplo en 25 x 4: «4 x 5 unidades son 20 unidades y 4 por 2 decenas son 8 decenas. Entonces tengo 8 decenas y 20 unidades. Eso es como 80 unidades y 20 unidades. Si las uno me dan 100.

—Otra, empleada sólo po José Antonio y Juan Antonio, decía así: «4 por 5 me da 20, que son unidades pero que son como 2 decenas. Y ahora 4 por 2 son 8 decenas. Como antes tenía 2 decenas las junto y me salen 10 decenas, que es como una centena y es 100».

Por la tarde volvimos al mismo trabajo. Como algunos ya hacían las manipulaciones con rápidez, propuse que el que se creyera capaz de hacer las cuentas con números solos que intentara hacerlas y el que no, que siguiera con el material.

Empezamos. Ahora un niño dice un número y otro dice por cuánto lo hemos de multiplicar.

Las primeras expresiones numéricas que iban saliendo se escribían en la pizarra y su autor las explicaba. Al poco rato los que manipulaban el material lo abandonaron con lo que ya todos operaban a nivel numérico.

Las cuentas eran de diversos tipos. Así en 125 x 4 unos escribían:

$$125 \times 4 = 20 \text{ y } 80 \text{ y } 400 \qquad \begin{array}{r} 400 \\ 80 \\ 20 \\ \hline 500 \end{array}$$

Otros lo hacían de este modo:

125 x 4 = 400 80 20

Otros escribían:

$$125 \times 4 \qquad \begin{array}{r} 20 \\ 80 \\ 400 \\ \hline 500 \end{array}$$

Las discusiones fueron avanzando hasta que llegamos al siguiente tipo que dimos por definitivo:

125 x 4 = 20 + 80 + 400 = 500

Durante dos días estuvimos practicando esta última forma de hacer las cuentas. Sin embargo en las casas de algunos los padres y los hermanos mayores no opinaban muy bien de ella. Una tarde Sonia propuso multiplicar «poniendo una raya como mi hermano». La propuesta tuvo eco y decidieron hacer las cuentas como decía Sonia, poniendo los números «debajo de una raya».

De ese modo llegamos a tener cuatro formas distintas de hacer las cuentas. Por ejemplo, en 23 x 4 eran:

De este modo llegamos a tener cuatro formas distintas de hacer las cuentas. Por ejemplo, en 23 x 4 eran:

---► 23 x 4 = 12 + 80 = 92

---►	
23	4
x 4	x 23
12	12
80	80
92	92

---► *Y este que hacían dos niñas*

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 4 \\ \hline 92 \end{array}$$

En los días siguientes dedicados a las cuentas cada uno las hacía a su modo. De vez en cuando yo les pedía que algunas las hicieran de varias maneras distintas. Pero, poco a poco, el modelo estandar fue ganado adictos por ser «el más corto», «el más rápido». Tengo que decir que a algunos chicos les resultaba difícil, como demasiado sintético, aunque conocían el mecanismo. Quizás la dificultad esté en que deben hacer un doble esfuerzo simultáneo.

— Multiplicar y convertir las unidades en decenas, las decenas en centenas y...

— Conservar mentalmente las decenas ó centenas resultantes para añadirlas a la cifra de la posición siguiente.

La didáctica tradicional ha tratado de suprimir ese esfuerzo apoyándose en una mecánica con coletilla verbal: «Tres por cuatro 12 y me llevo una». Y parece eficaz. Pero tiene el inconveniente de ocultar al alumno el verdadero mecanismo de la cuenta e impedir su descubrimiento.

El proceso de aprendizaje de estas cuentas nos llevó unas dos semanas - 10 de los 19 que son, necesitaron menos días -. A continuación iniciamos el aprendizaje de las cuentas en las que el operador es de más de una cifra. El proceso ha sido muy parecido al anterior: de las diferentes formas de hacer las cuentas que han surgido -básicamente iguales a las que antes he expuesto- han ido convergiendo en la estandar.

En mi opinión el aprendizaje de los algoritmos se basa en el conocimiento previo que tengan los alumnos del sistema numérico. Sin conocer los mecanismos del sistema (valores de posición, etc.) no es posible ni crear algoritmos ni comprenderlos. Y una cosa que no se comprende fácilmente se olvida».

Existen otras experiencias con alumnos en las que han surgido más formas diferentes de efectuar las cuentas, así como otras en las que se ha dado más importancia al trabajo en grupos pero tienen en común con la experiencia expuesta:

1.- Suscitar el interés por aprender a hacer «cuentas difíciles a partir de situaciones reales y juegos.

2.- Buscar colectiva ó grupalmente una manera de solventarlas. Nunca el maestro les adelanta la resolución. En algunos se han apoyado en la manipulación de material no del tipo multibase comercializado sino en otro estructurado elaborado por el propio maestro.

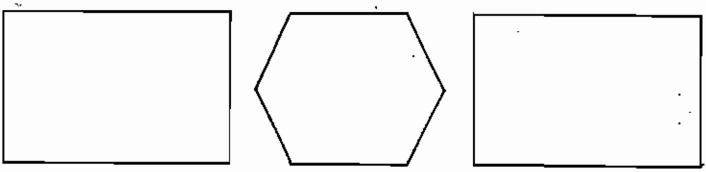
3.-Fomentar el debate, la confrontación.

4.-Alternar sesiones colectivas con tiempos de trabajo individual.

Conviene que tengamos presente la distinción entre aprendizaje de la cuenta y rapidez en la mecánica operatoria. El proceso de aprendizaje debe ser abierto, de tanteo, posibilitador de creaciones, la manipulación de material y el trabajo colectivo. Sin embargo la agilidad mecánica, la automatización, viene como consecuencia de un proceso personal repetitivo. Dicho proceso necesita otras motivaciones y otros materiales y sobre todo un trabajo sistemático y continuado.

V.- CONJUNTOS - CONJUNTOS DE CONJUNTOS

Si nos atrevemos a cambiar de representaciones gráficas y del esquema estado-operador-estado de este tipo:



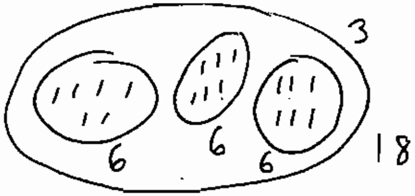
Y pasamos al tipo de representación conjuntista, el aprendizaje de la operación ganará en profundidad. Para muchos chicos, la imagen conjuntista es más esclarecedora.

Comencemos por representar recurriendo a diagramas y cardinales, problemas sencillos como éstos:

— En un árbol hay cinco nidos. En cada nido cuatro pájaros.

— En un cajón del armario hay tres cajas de lápices. Cada caja tiene seis lápices.

Seguramente llegaremos a confluir en una representación así:



Las cajas son conjuntos de lápices. El cajón o el árbol, un conjunto de conjuntos. Para hallar el número total de lápices lo que hacemos es multiplicar el cardinal del conjunto de conjuntos (3) por el de cada conjunto.

El esquema operatorio es asimilable al aritmético:

— Cuatro cajas; cada caja tiene seis lápices.
— Cuatro cajas; en cada caja hay...
— Cuatro cajas; de cada caja sacamos...

Al mismo tiempo que aporta una nueva visión de la misma operación.

La aritmética de conjuntos, elementos, conjuntos de conjuntos, está en el sistema de numeración como puede verse en la experiencia «el truco de los números».

Las experiencias que en estos niveles escolares -III y IV cursos- se llevan a cabo sobre clasificaciones, subconjuntos, inclusión, etc, contribuyen a ir conformando globalmente el pensamiento matemático. Tengamos en cuenta que simultaneamente estamos tratando la división cuya problemática viene a ser la misma: elementos, conjuntos, conjuntos de conjuntos, equidistribución.

En otras palabras, nos encontramos en una etapa del desarrollo evolutivo infantil en el que priman la globabilidad y las estructuras de conjunto.

Obsérvese lo que tienen en común: sistema numérico, los puntos 4, 5 y 6 del esquema de las clasificaciones expuesto en el capítulo de la suma, multiplicación y división. Teniendo en cuenta, por otra parte, que trabajamos principalmente sobre lo concreto, pues aún no se puede llegar a la idea de clase como tal ni a la visión puramente aritmética del número.

El apoyo gráfico en problemas como los citados es fundamental en una primera etapa.

Este hecho facilita la comprensión y solución de otros problemas del mismo tipo pero más complicados en una etapa más avanzada:

— Un tren tiene 3 vagones, en cada vagón hay 10 departamentos. En cada departamento viajan siete personas.

— Un bloque de viviendas tiene 6 plantas. En cada planta hay 4 viviendas. Cada vivienda posee 6 ventanas. etc.

Ciertamente no hay multiplicación conjuntista y otra de estados y operadores. Lo que existe es un esquema operatorio matemático mediante el cual resolvemos situaciones o interrogantes. Veamos cuatro diferentes:

— Tiene tres bolsas y en cada bolsa hay 7 caramelos. Hallar el total de caramelos.
— Tres lápices, cada lápiz vale 10 pesetas.
— Halla un número que sea tres veces mayor que 5.

Si reflexionamos un poco encontraremos que en todas ellas aplicamos un mismo esquema resolutorio aunque la visualización de cada una sea diferente.

EL tema de fondo no está en **qué es multiplicar,** cosa que queda para los matemáticos sino en **cual es el recorrido didáctico idóneo** para llegar a multiplicar. Es posible adcribirse a alguna concepción de la matemática y enfocar desde allí su enseñanza en la escuela. Este es el porqué de los cuatro enfoques que citamos al principio del capítulo.

Sin embargo nuestra óptica es integradora y amplia. Intentamos con ella proporcionar al alumno una variada gama de experiencias aunque con cierta sistematización; colocarlo en situaciones diferentes e intentar que halle los útiles gráficos, lingüísticos y conceptuales que, una vez en posesión de los mismos, le permitan construir los esquemas operatorios multiplicativos. Adoptamos la perspectiva de la variabilidad y la influencia múltiple y conectamos el aprendizaje estrictamente matemático con las otras materias escolares o en muchos casos lo extraemos de las mismas.

INVESTIGAR EL TRUCO DE LOS NUMEROS

I

En la asamblea del día anterior habíamos decidido investigar los números pues algunos aún se equivocaban al operar. Así, pues les animo a descubrir cómo se hacen los números. Como afirman que ya saben «porque ya hicieron el año pasado» les invito a que inventemos nosotros una manera de contar y escribir los números.

Les escribo los números que usaban los romanos. Hay una gran sorpresa cuando les cuento que las cifras que nosotros usamos proceden de los hindúes y de los árabes ¡de los moros!.

Una leyenda que en ese momento se me ocurre surte ese efecto mágico: «Hace muchísimos años, cuando no había carreteras, ni camiones, ni ... había dos tribus: una vivía en las montañas, la otra en la llanura. Los leñadores cortaban los troncos de los bosques de las montañas, pero ¿cómo los transportaban hasta la tribu de la llanura?. Los echaban al río, ...»

Después de la leyenda unas preguntas interesantes: ¿cómo contarían los troncos los cortadores?, ¿cómo harían los compradores para saber cuántos les habían llegado?; ¿cómo los colocarían para contarlos? etc.

— Pues, contando -asegura la mayoría-: 1, 2, 3, ... 11, 12, ...

— Claro, así contamos nosotros, respondo, pero los

romanos y los indios no contaban así. Podemos contar los troncos de distintas maneras.

Si alguien propone alguna forma, la hacemos de verdad; nuestros cuerpos serían los troncos.

Hay diversas propuestas y las teatralizamos poniendo de troncos a nosotros mismos. En ello se nos fue toda la tarde.

Al día siguiente propongo continuar, pero en lugar de troncos contaremos alubias.

Cada uno dispone de un puñado de alubias sobre su mesa. Hay que saber cuántas alubias tiene cada cual y explicar cómo las ha contado.

Una vez que cada uno ha contado su montón, verbaliza cómo lo ha realizado. Las maneras en que lo han hecho pueden clasificarse en tres tipos:

a) De uno en uno: 1, 2, 3, ...

b) Otros hacen montones de a diez que ponen separados sobre la mesa y aun les quedan algunas alubias sueltas.

c) Otros hacen montones de a diez pero después los van juntando para calcular el total.

Esos tres tipos los escribo en la pizarra. Hemos de escoger la mejor forma de contar. Optan, después de unas interesantes discusiones, por el tipo b).

Tras contar varias veces diferentes montones de alubias, propongo dejar de calcular haciendo montones de a diez «pues ya sabemos» y planteo contar de otra forma (como habíamos hecho con los troncos), con el siguiente juego: uno dice de cuántos elementos haremos los montones y los demás calculamos la cantidad de alubias de nuestra mesa de ese modo.

Así, pues iniciamos el juego y no parece haber dificultades en contar agrupando en cualquier base (son cantidades inferiores a 20 unidades) ni en verbalizar el resultado: «dos conjuntos de a 7 y tres sueltos), «tres conjuntos de a 5 y cero sueltos», etc.

Tengo que hacer la aclaración al lector de que esta experiencia fue realizada con alumnos de tercer curso y que éstos ya habían trabajado bases.

Ya que no hay dificultades les incito a dar un paso más: «escribir con números las alubias que tenemos». Es decir, simbolizar. El juego sigue siendo el mismo con la unica diferencia de que además de decir la cantidad con palabras hay que decirla con números sobre un papel.

Los debates que ello originó fueron muy estimulantes. Trataré de sintetizar los pasos seguidos en la simbolización.

Tenemos todos un montón de quince alubias. Lo contamos haciendo conjuntos de a 6 alubias. Cada cual escribe su solución en el papel. Además algunos escriben la suya en el encerado. Discutimos las del encerado, que han sido las siguientes:

a) 2 conjuntos y 3 sueltos
b) 2 decenas y 3 sueltos
c) 6, 6, 3

Para favorecer más la discusión propongo escribir ahora sin letras, sólo cifras pero que los conjuntos sean de a 7.

a) 7 7 y 1
b) 2 / 1
c) 1 / 2

La cuestión clave está en «por qué Jesús ha escrito 2, 1 y Paquita 1 / 2»; ¿el 2 de Jesús y el 2 de Paquita se refiere a los montones?» Por último decidimos en qué lado escribiremos la cifra de los conjuntos.

Tomada ya esa decisión proseguimos contando el montón de 15 alubias en bases 10, 9, 8,... No hay obstáculo en ello hasta llegar a la base 3. Pero las dificultades trataremos de superarlas al día siguiente.

II

Contemos nuestras 15 alubias haciendo conjuntos de a 3. Las escrituras del encerado con sus lecturas son las siguientes:

a) 9 3 («nueve en un lado, dos conjuntos de tres en otro y no tengo sueltos»).

b) 3 0 («conjuntos de tres y no hay sueltos»).

c) 5 0 («cinco conjuntos de tres).

Opinan mayoritariamente que estan bien las escrituras «b» y «c» pero no la «a». Pero José A., el de la notación 9, 3, trata de argumentar:

— Si, porque voy de tres en tres y tenía tres conjuntos y los he juntado porque hay que juntarlos. El año pasado, cuando hacíamos esto con botones, los metiamos en una caja.

— Claro, -intervengo-, eso es; pero ¿tienes sueltos?.

— No contesta.

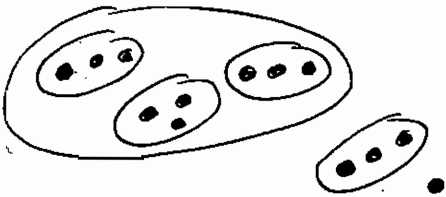
— Ese tres, ¿qué significa?

— Los conjuntos

— ¿Y ese nueve?, insisto

— Ya está, dice eufórica Sonia, es un conjunto de cojuntos de a tres.

— Eso, eso era, rectifica Jose A. Y nos lo explica en la pizarra con este gráfico.



Vemos entonces que no se trata sólo de contar de tres en tres sino que además, cuando tenemos tres conjuntos, los unimos formando un conjunto de conjuntos.

Con lo que acabamos de redescubrir propongo contar las alubias y escribir lo contado.

Esta vez las escrituras se agrupan así:

a) 3 3 0
b) 2 1 0
c) 1 2 0

Se coincide en que la escritura a) no se entiende y que b) y c) son iguales «pero cambiadas».

Hemos dado, sin duda, un gran paso hacia adelante: escribir la cifra del conjunto de conjuntos.

No obstante el esquema espacial se tambalea y habrá que convenir definitivamente el orden en que escribiremos las cifras, pues de lo contrario no nos vamos a entender.

Acordamos seguir el orden del año pasado aunque no hagamos conjuntos de a diez. Mari Mar no recuerda que el año pasado poníamos señales encima para no confundirnos. Lo cual parece interesar y tras varias propuestas llegamos a la siguiente señalización:

	C.C.	C.	S.

S. ——→ Sueltos
C. ——→ Conjuntos
C.C. ——→ Conjuntos de conjuntos.

Con este esquema para no equivocarnos de sitio hacemos algunos ejercicios con cantidades diferentes, manipulando primero, escribiendo después.

Si obtenemos, por ejemplo, 1, 2, 4 hay cuestiones interesantes que responder: ¿vale más 4 que 2?, etc. Los que aun no veían claramente la simbolización lo van viendo: 4 son sueltos pero 2 son conjuntos. Además 1 es que «es un conjunto de conjuntos y vale mucho más».

III

Resumiendo. Hasta ahora:

a) Hemos contado manipulativamente. Hemos establecido un «truco» para contar: agrupando según la base que se diga. Si el juego es contar haciendo conjuntos de a cinco decimos que estamos en base 5. Si es haciendo montones de a 8 decimos que contamos en base 8.

b) Hemos convenido un «truco» para escribir todos en el mismo orden. Y para que no se nos olvide hemos inventado unas señales.

No está demás decir que el orden unidad, decena, centena, lo conocen todos y que operan con normalidad en él. Es interesante observar que al cambiar de campo de aplicación de dicho esquema, como en este caso *en que estamos contando en bases diferentes, no lo aplican y quien lo aplica lo hace incorrectamente. Cuando se han visto llevados a la nueva situación de reinventar un sistema para contar han recurrido a conceptos lógicos o conjuntistas llamando conjunto al agrupamiento de 1.º nivel ó decena en base diez, conjunto de conjuntos al agrupamiento de II.º nivel, etc.*

Hay un factor de gran importancia en el porqué de los errores en las modalidades de escrituras antes citadas. Por ejemplo, el hecho de que una cantidad de 15 alubias la representación en base tres como $\boxed{9\ 3\ 0}$ *ó bien* $\boxed{3\ 3\ 0}$ *ó* $\boxed{2\ 1\ 0}$.

Sencillamente retratan con números lo que han hecho con las manos: han agrupado y luego escriben simbólicamente lo que han hecho. El factor tiempo tiene, en mi opinión, gran importancia, en el porqué de la distinta ordenación de las cifras.

Sin embargo, mayor aún parece ser la importancia de la distribución espacial sobre la mesa de los elementos contados.

Pero dejamos por ahora estas reflexiones y continuemos con la cronología de nuestra experiencia.

IV

En clase somos 20. Nos vamos a contar con todas las bases pero, en lugar de utilizar nuestros propios cuerpos como ya hicimos con los troncos, utilizaremos botones.

Manipulamos, colocamos sobre la mesa, escribimos *los números. La tabla que va apareciendo es la siguiente:*

base 10	→	*20*
base 9	→	*22*
base 8	→	*24*
base 7	→	*26*

Sorprende. ¿Vale igual 20 (dos, cero) que 26 (dos, seis)? ¿ Siempre somos la misma cantidad en clase?. ¿Entónces, 20 vale como 24 y 32?.

La discusión se prolonga en base a preguntas como las anteriores y vamos llegando a la conclusión de que son diferentes escrituras de una misma cantidad, de un mismo montón; que su escritura depende de la base que elijas.

Continuamos anvanzando para ver si somos capaces de escribir en todas las bases. La mitad aproximada de ellos lo son, pero unos cuantos no pasan de la base 4. Pienso que porque contar veinte botones en base 4 precisa de un agrupamiento de II.° nivel; el que denominan conjunto de conjuntos y que para ellos no estaba claro. Lo mismo sucede en base 3 cuya escritura es 202.

Parece evidente que el paso a niveles superiores de agrupamiento, a potencias de nivel II, III, etc, necesita de un mayor nivel de abstracción, de manipulación representativa del agrupamiento, de movilidad en las imágenes subyacentes.

Ante este hecho y dadas las diferencias entre unos chicos y otros optamos por el trabajo individual en dos vertientes:

1. *Fichas preparadas por mí.*

2. Ejercicios similares a los de las fichas pero realizándolos manualmente sobre material discreto.

Los diferentes ejercicios formulados bajo la simbolización ya convenida son variaciones sobre estos dos tipos:

a) Dibujo los elementos de una cantidad. Hay que escribir su número.

b) Escribo un número. Hay que dibujar sus elementos y/o colocarlos sobre la mesa.

V

Hemos pasado del trabajo colectivo al individual sobre ejercicios y fichas. Para sorpresa mía constato más errores y fracasos en su resolución de los esperados por mí.

¿De dónde pueden provenir los obstáculos? Del diálogo con ellos, de la observación de sus diferentes dificultades, constato que hay algo que condiciona y obstaculiza tanto la movilidad imaginativa como el orden creciente del agrupamiento para la mayoría de ellos: es la **espacialidad** *de los agrupamientos, modo de ordenar (no orden, pues el convenido ya lo siguen todos) y distribución del material empleado sobre la mesa.*

En consecuencia propongo empezar de nuevo a ver si sale algo más fructífero. Hablo de que el «truco» no lo ha descubierto ninguno todavía, que me parece que es porque ponen los botones mal sobre la mesa, que los ponen desordenados...

— No ponemos mal. Los ponemos como hemos quedado, empezando por los sueltos, dice Fran.

— Si, pero si los ponemos así, en filas iguales mejor, replica Jose Mari.

— De acuerdo, -intervengo. Probaremos como ha dicho Jose Mari, bien colocados. Pero los sueltos ¿dónde?, ¿en medio de la mesa?... ¿Y los

conjuntos?... ¿Por qué lado de la mesa empezaremos a ordenar?...

Ahora cada uno tiene un montón cualquiera de botones. El juego consiste en que uno propone un número y una base; yo lo escribo en la pizarra y ellos lo representan con botones en su mesa. La preocupación se centra en colocar «como dijo José Mari». Según «el orden del número» y en «su sitio» en la mesa.

Después de numerosos tanteos hemos llegado colectivamente a la siguiente distribución sobre la mesa «pero sin dibujar las rayas» y además colocando los botones en filas («no amontonandò los conjuntos») y siguiendo el orden creciente de los valores posicionales en el número.

....	C.C.C.	C.C.	C.	S.

Los que tienen dificultades espaciales no pueden resistir la tentación de trazar las rayas en la mesa, pues les cuesta conseguir una repartición espacial proporcionada de la misma.

VI

Me parece indudable que en la base de toda operación matemática existen ciertos factores tanto temporales como espaciales que condicionan la ejecución exitosa de la operación. Lo deduzco tanto de las observaciones antes citadas como de constatar la alegría y el afán por seguir buscando «el truco de los números» que produjo el que los números propuestos les «salían bien» ahora.

Pero ¿qué números salen bien y qué otros no? ¿dónde están los obstáculos?, ¿por qué «los números largos no salen bien»?.

Nos encontramos en este punto y es esta problemática la que, una vez evidenciada les devuelvo al día siguiente planteada de esta forma:

— Ya algunos hacéis bien los ejercicios pero no sabéis explicar por qué os quedan bien colocados los botones. Otros no estáis seguros de lo que hacéis. Ya casi hemos entendido lo de los números. Para encontrar todos el «truco» nos vamos a fijar en «cómo crecen», «en cuántos hay en C. y cuántos en C.C.».

Utilizaremos iturris (chapas) y yo seré quien diga el número y la base. Y a ver si somos capaces de descubrir «como van creciendo y por qué».

Después de varios números no conseguidos y discusiones infructuosas propongo el «uno, uno, uno» (111) en base tres. La realización material es correcta y las explicaciones van tomando sentido:

— Claro, dice Iñaki, es que el conjunto vale como tres sueltos y luego, pues,...

— Fran interrumpe: eso, el conjunto de conjuntos es tres conjuntos, es tres veces mayor que el conjunto.

— ¿Por qué?, pregunto

— Pues ahí hay tres y tres por tres, ... sale nueve y van en orden, clarifica Fran.

Vamos entrando, a mi modo de ver, en el centro de la problemática: el crecimiento multiplicativo.

Proseguimos con diversos números. Es ahora cuando ya los dudosos se van asegurando de lo que intuían y otros objetivando verbalmente lo que piensan:

— Es que se van multiplicando por tres, dice Alicia dando un salto.

— Ya está. Venga, dinos otro número, grita Jorge que hasta ahora había permanecido en silencio.

— De acuerdo, pero ahora lo voy a hacer más difícil. Yo escribo en orden los números de elementos de cada lugar. Si averiguáis cuál es el número siguiente es que ya habéis descubierto «el truco de los números».

Escribo problemas del tipo 1 1 1 1 como este:

c.c.c.c.	c.c.c.c.	c.c.	c.	s.
?	?	16	4	1

Los primeros en encontrar los siguientes números no esperan a los demás y los dicen a voces.

Hemos llegado así a la raiz del sistema numérico: agrupamientos multiplicativos.

Para cerciorarme les sorprendo con una pregunta:

— ¿Podría yo seguir poniendo números «más mayores» para acá, para la izquierda?.

— Sí, claro, dicen algunos.

— Juan Antonio todo seguro, afirma categóricamente: claro, es que son «anfinitos».

— ¡Hala! extrañados. ¿Qué es eso?

Y J.A. intenta explicar su palabrota, que dice que se la ha oído a su hermana.

Pero no todos los niños han llegado al mismo punto. Y a los que han llegado les hace falta, creo, madurar y profundizar en ello.

Se impone ahora el trabajo individualizado y en pequeños grupos.

VII

Hemos llegado, aunque sin profundizar, a lo siguiente:

— El número «va creciendo de derecha a izquierda».

— Para pasar de un nivel a otro se pasa multiplicando.

— El conjunto de los números no se acaba, es infinito.

Observo con satisfacción que resuelven la mayoría de los ejercicios como los antes mencionados. Sin embargo, algunos fallan siempre en el mismo tipo. Trataré de explicarlo.

Materializar (poner sobre la mesa los elementos correspondientes) números del tipo 111 en cualquier base no ofrece dificultad.

Hacer lo mismo pero con números de otro tipo, por ejemplo, 203 en base cuatro, no es posible para algunos, ¿por qué?, ¿en dónde radica la dificultad?.

Hay, en mi opinión, dos grupos diferentes de factores que constituyen el fondo del problema: Uno es la generalización; otro, los procedimientos de cálculo.

Según el proceso seguido hasta ahora, estamos realizando colectivamente la construcción, al mismo tiempo que el descubrimiento, de las leyes del sistema numérico de nuestra cultura. Llegados a un escalón de ese proceso de construcción trato de que generalicen lo descubierto o contruído, operando en otras bases o con números de mayor dificultad.

Esta generalización es fallida frecuentemente (hablo en general, pues no todos los chicos tienen las mismas dificultades) ¿Por qué? Generalizar, extender y aplicar lo descubierto a otro tipo de situación ó problema lleva consigo la reconstrucción de lo que anteriormente se descubrió para aplicarlo. Pero sucede que, por un lado son todavía descubrimientos parciales; por otro, al ser parciales aun no han llegado a la visión global razonada del funcionamiento del sistema, lo cual les hace errar en una situación algo más compleja.

El segundo grupo de factores es de tipo calculatorio. Estamos manejando dos vías diferentes:

— Una conjuntista, la propuesta por ellos, incluso simbolizada. (Ver párrafo II).

— Otra aritmética, introducida por mi (ver párrafo VI).

Dos vías que suponen dos razonamientos diferentes si bien al final confluyen.

La solución de un problema, desde el punto de vista conjuntista, (conjunto, conjunto de conjuntos...,) requiere un predominio de pensamiento de tipo imaginativo y una gran capacidad de abstracción. Desde el punto de vista aritmético se trata simplemente de montar, sobre la base del razonamiento conjuntista, las cantidades de cada nivel haciendo uso del esquema multiplicativo de crecimiento.

A la postre, ambos modos operativos parecen ser necesariamente fusionados o, al menos, eso hacen los que han descubierto «el truco», es decir, las leyes del sistema. De los alumnos que aun fracasan hay dos tipos:

— Los que usan predominantemente el modo conjuntista y se ven impedidos de pasar al tercer o cuarto nivel.

—Los que intentan usar exclusivamente el modo aritmético (crecimiento en potencias) pero lo han entendido mal y pasan del esquema multiplicativo al activo y viceversa indistintamente.

Vease detenidamente el desarrollo de estos números:

1.— Escribe lo que vale cada cifra en el número 1 1 1 1 1 base 3:

c.c.c.c.	c.c.c.	c.c.	c.	s.
1	1	1	1	1
36	18	9	3	1

error, n.º elementos cada cifra en base 10

2.— Haz igual con 1 1 1 1, base 5

1	1	1	1
125	10	5	1

3.— Lo mismo con 2031 base 4

2	0	3	1
24	0	12	1

El error fundamental procede, creo, de una falsa utilización del esquema multiplicativo.

En los números del tipo 1 1 1 se ve claramente que del elemento anterior sale un nuevo conjunto que es la base. Pero en números cómo 2 0 1 3 eso no es posible, tendrá que multiplicarse el conjunto base por sí mismo. ¿Cómo es posible enseñar eso a los que aún no lo han vislumbrado? Prefiero, personalmente, no explicarlo y continuar colectivamente hasta encontrar la manera de descubrirlo.

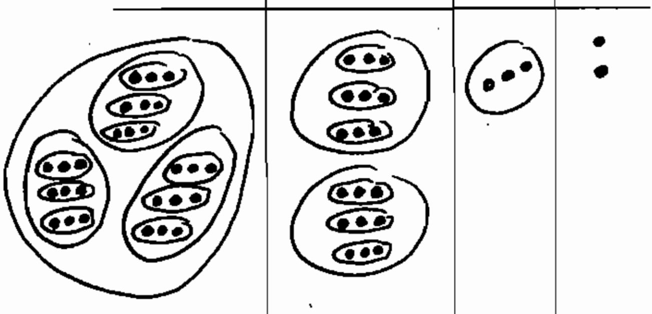
Entre tanto, nos ocupamos unos días trabajando bases con el material y las fichas de Dienes, cosa que también hicimos en el curso anterior.

VIII

CAMBIO DE SEÑALES

Para recapitular sobre lo trabajado y comprobar colectivamente si ya entendemos «cómo son los números por dentro», propongo el siguiente ejercicio:

Yo escribo un número fácil en base cualquiera. Ellos lo escriben en su hoja, colocan las señales, dibujan los elementos que hay debajo de cada cifra y señal y más abajo escriben el número de elementos que vale cada cifra. El esquema es el que sigue, por ejemplo, para el número 1 2 1 2, base tres:

C.C.C.	C.C.	C.	S.
1	2	1	2
			
27	18	3	2

Este tipo de ejercicios provocó dos cuestiones importantes:

a) Que la señalización S., C., C.C.... «es muy liosa» lo que aprovecho para retomar propuestas anteriores de cambiar las señales.

b) Que dibujar todos los elementos «no se puede porque no caben en la hoja», lo que hace que vayan pasando directamente a escribir numéricamente la posición e insistan en el esquema multiplicativo.

Las nuevas propuestas de señalizaciones son variadas. Elegimos la propuesta por Jesús: C3, C2, C1, S., que según él significa que el conjunto se multiplica una vez (c.1) ó dos veces (c.2), etc.

Ahora bien, operando con las señales de Jesús llegamos a ciertas confusiones, que demostraron ser fructíferas. De principio hay quienes leen así: c.1 como «conjunto uno», c.2 como «conjunto dos», etc, lo cual indica una sucesión no multiplicativa, es decir, para saber cuánto vale c.2 muchos suman dos veces el valor de c., o sea, el conjunto base.

Cambiamos de expresión lingüística y concluimos en que c.2 es multiplicar el valor de c. dos veces; el valor de c.3 se encuentra multiplicando tres veces el valor de c.; etc.

Así de c.2 = c + c., hemos pasado a que c.2 = c. x 2.

Jesús no está satisfecho y nos demuestra que las dos maneras anteriores son erroneas:

—«Para saber lo que vale C.2 no se multiplica por 2 ni se suma sino que se multiplica c. por c. que no es lo mismo».

E intenta demostrarlo con ejemplos de números.

Las opiniones se dividen pero poco a poco le van dando la razón a Jesús «porque es más fácil hacerlo así».

En el fondo, como la experiencia demostró, las dificultades no radican tanto en la lectura e interpretación de las señales sino en pasar del esquema aditivo de crecimiento (c.2 = c + c) al multiplicativo (c.2 = c. x 2); considerarlos falsos y llegar al crecimiento en potencias (c.2 = c. x c.).

Habituados a seguir crecimientos como 3, 6, 9, 12,..., cuesta llegar a otros como 3, 9, 27, 81,..., y explicitarlos como 3, 3 x 3, 3x3x3, ... Más aún si dicho crecimiento debe ajustarse al enfoque conjuntista y con valores posicionales de cifras distintas de 1.

Y bien, ¿que quiere decir C.? Obviamente el conjunto base en cuestión o agrupamiento de primer nivel. Entonces ¿por qué no cambiar las señales para que sea más claro y escribir el valor del conjunto en lugar de c.?.

Efectivamente, con el tiempo, sustituimos c. por el valor de la base y escribimos, para base diez, por ejemplo, ... 10^{3}, 10^{2}, 10^{1} *s.*

El proceso de cambiar colectivamente las señales nos ha costado varios días pero ha merecido la pena pues ha ido provocado por el mejor conocimiento del sistema numérico al mismo tiempo que los cambios han ido apoyando una profundización en el mismo.

IX

Se impone hacer algunas reflexiones

Para llegar a «descubrir el truco de los números», es decir, desentrañar las leyes que conforman nuestro sistema de numeración, hemos empezado simplemente agrupando elementos y hemos llegado a la escritura en potencias; hemos recorrido un camino lleno de descubrimientos pero aun sin terminar.

Desde la perspectiva del método se presentan dos tipos de problemas.

A) Es evidente que si yo suministro la fórmula (a veces me asaltaba esa tentación) para resolver los problemas, contradigo y deshago el camino de descubrimiento personal-colectivo seguido hasta ahora. Por otra parte no es igual descubrir, reinventar una ley matemática, algoritmo o fórmula que explicarla y hacer que se aplique.

Y en este caso me inclino por no explicar pues precisamente la cuestión matemática en la que estamos se presenta como absolutamente necesitada de ser redescubierta o construida personalmente si se quiere que se convierta en operativa. La experiencia nos demuestra a todos que una fórmula matemática es una catinela o un truco huero a menos que dicha fórmula o ley haya sido construída por el que investiga: en este caso, el niño.

B) Otro tipo de problemas son los referentes al necesario equilibrio entre los tiempos de trabajo colectivo y los de trabajo individual. Ese equilibrio marca la pauta al avance en el camino a recorrer. Para explicitar lo que acabo de decir, expondré hechos concretos:

1. La simbolización adoptada ha ido siendo en todo momento convención colectiva, de tal modo que la simbolización última a que hemos llegado, que viene a ser la universal, la consideran propia y exclusiva. Pero ello mismo conlleva ciertas dificultades. De la simbolización s., c., c.c., c.c.c., ... se convino en pasar a s., c.1, c. c.3,...

Sin embargo, ese paso es sólo entendido por el que lo propone y algunos más.

Los demás se ven constreñidos a utilizarla por el método de trabajo que utilizamos pero les lleva algún tiempo asimilarla, hacerla propia y operativa lo cual suscita desfases entre los alumnos.

Dar otro paso o cambio, por ejemplo, de s., c1, c2, c3,... a s., 5-1, 5-2, 5-3 y de éste último a s., 5^1, 5^2, 5^3, suscita los mismos desniveles.

2. Averiguar el valor de cada cifra en los números 1 1 1 1 y 1 2 0 3 base 4, por ejemplo, presenta dificultades de características diferentes. Para el primer número es válido (recuérdese que son alumno de III.° curso) el esquema multiplicativo conjuntista convenido en clase: de cada elemento del nivel anterior sale un conjunto para el nivel inmediatamente superior. Así, los valores de las cifras son fácilmente encontrables: 64 - 16 - 4 - 1.

Por el contrario, para el segundo número, al existir posiciones nulas y otras de valor no unitario, no es válido el esquema operatorio anterior lo que nos fuerza a proseguir la búsqueda de otro «truco» que valga para todos, que llegó a ser el aritmético o de potencias. Esa búsqueda no puede ser sólo colectiva, o sólo individual, o sólo de pequeño grupo.

El contraste colectivo, junto con las sugerencias y materiales que el maestro pueda aportar son ineficaces si no van acompañadas del trabajo eminentemente personal de cada uno. La alternativa adecuada entre la investigación colectiva y la individual es imprescindible.

3. La distribución del tiempo está en función de las apetencias del grupo o de las ganas de trabajar sobre el tema. Frecuentemente se ha invalidado un horario que tenemos clavado en la pared y más de una vez he tenido que preparar material apresuradamente para atender la demanda del momento.

X

Alicia nos ha explicado que su hermana le ha dicho que escribir así: 5^3, se llama escribir potencias. Ahora *que ya sabemos eso podemos escribir números pero en forma de potencia:*

$$5^2 = 25$$
$$27 = 3^3$$
$$10_2 = \ldots \text{ etc.}$$

Incluso los leemos como la hermana de Alicia: «diez elevado a tres»,...

Pero hacemos más cosas. Por ejemplo, ya sabemos qué vale cada cifra en el número 1 4 3 1, base 10. Nos ayudamos con las señales:

10^3	10^2	10^1	S	Señales
1	4	3	1	número
1 x 10^3	4 x 10^2	3 x 10	1	lo que se hace para hallar el valor
1000	400	30	1	valor de cada cifra.

Y si yo pregunto que cuánto vale el cuatro en el número 1 4 3 1 hay diferentes maneras de contestar. Una es que vale 400 porque son 4 centenas juntas (pensar aditivamente). Otra es que vale 400 porque es 4 x 10^2 (esquema de potencias). Sin duda que hay otras maneras.

La escritura de un número es convencional. Una cantidad cualquiera puede escribirse de distintas maneras. Si ya sabemos el «truco» se nos ocurren más maneras de escribir que antes.

Por ejemplo, podemos escribir el número 16 así 4^2 o así 2^4 ó también así 4 x 4, ó también 10 + 6, ó también,...

Por cierto que todo esto ha tenido gran influencia en el aprendizaje de la multiplicación que por norma gubernamental está programada para este curso (III).

¿Qué falta? Falta profundizar, avanzar sobre lo encontrado, usar la terminología convencional de bases y exponentes, encontrar sus leyes operatorias, cambiar de bases, inventar maneras diferentes de sumar, multiplicar, ampliar el campo numérico y nuestro conocimiento del mismo. El tiempo y nuestra capacidad nos dirá hasta donde podremos llegar.

Seguiremos descubriendo, investigando «el truco de los números».

XI

La polémica que ha suscitado entre los didactas la enseñanza de las bases numéricas a alumnos de E.G.B., sigue sin concluir.

Unos se han mostrado decididamente a favor, mientras que otros son fanáticamente contrarios a su enseñanza. Unos y otros parecen tener contundentes argumentos para refutarse entre sí.
En mi opinión la polémica no tiene sentido, es decir, no es ahí donde hay que discutir.

Lo que hay que discutir es la concepción del aprendizaje, de la escuela, de la enseñanza.

Si consideramos que la matemática es una ciencia con su temática propia como todas las ciencias, que debe ser enseñada al niño, y si consideramos que el niño va a la escuela a aprender esa ciencia, entonces, sí podremos discutir si tal o cual tema es conveniente que sea enseñado o no. Optamos en consecuencia y nos justificaremos con argumentos consistentes.

Por el contrario, si nos colocamos en otra posición, con otra filosofía de la vida y de la escuela. Si nos apoyamos más en los trabajos de la psicología actual y menos en la ortodoxia de los científicos matemáticos; más en cómo aprenden y cómo son los niños y menos en qué deben aprender y cómo deben ser. Entonces nos situaremos fuera de la polémica y no impartiremos el tema de las bases porque lo dicte o no el programa oficial.

En la experiencia antes descrita lo que se ha hecho ha sido investigar; investigar colectivamente nuestro sistema numérico. Para ello hemos utilizado el material que otros usan para enseñar el tema de las bases y las potencias, sus sugerencias y las sugerencias de los textos, pero no hemos estudiado el tema. Nos hemos basado en tres términos fundamentales: manipulación de material, simbolización colectiva e investigación. Y hemos descubierto qué es y cómo funciona eso de los números. No no interesa nada más porque en el proceso de construcción del propio conocimiento es donde reside el verdadero valor del trabajo escolar».

IV d

División

INTRODUCCION

Hay un tipo de acciones que espontáneamente efectúan los niños desde los cuatro ò cinco años: son las acciones de repartir objetos ó de partir cosas en partes iguales. Por ejemplo:

— Cuando en casa se le da la vajilla a un niño para que ponga la mesa.

— En juegos naturales de familias, comidas y muñecas.

— Cuando recibe un obsequio (caramelos, tarta, etc) para repartirlo entre sus hermanos.

Las acciones de este tipo y las operaciones psicológicas que las soportan son el sustrato sobre el que se construye la división como operación aritmética.

La escuela refuerza acciones como las anteriores pues la vida social del aula provoca muchas situaciones de partición, de repartición y de agrupamientos: ordenar el material, agruparse en equipos, clasificaciones, etc.

Pero la escuela aporta, o al menos lo pretende, algo más: los números y su ejercitación con ellos de tal forma que, cuando se exige de los alumnos la resolución de situaciones de partición o repartición, ya poseen éstos unas herramientas:

— Cierta capacidad de cálculo.
— Operaciones lógicas más evolucionadas.
— Experiencia de situaciones similares previas.

Comúnmente las programaciones escolares anteponen el aprendizaje de la multiplicación al de la división, pero sin dar explicaciones de ello. Sin embargo, no hay razones suficientes para anteponer la multiplicación a la división toda vez que son más cotidianas las situaciones de partición y repartición. Nuestra opinión es que multiplicación y división son como dos caras de la misma moneda y su aprendizaje es simultáneo pues de lo que realmente debe hablarse es de operaciones multiplicativas que incluyen esquemas de ambos tipos.

Conocemos varias formas diferentes de abordar la enseñanza de la división pero que pueden agruparse en dos:

— Unas tienen como característica común el enfoque conjuntista, la terminología y representación de corte conjuntista y la utilización preferente del libro de texto.

— Otras tienen de común basarse en experiencias directas, ya de partición, ya de reparto de material discontinuo; obvian el lenguaje conjuntista y dan preponderancia a lo aritmético.

Cabe preguntarse el por qué de tan diferente tratamiento didáctico a una misma operación.

Normalmente, creemos, la elección de una didáctica u otra, viene condicionada, principalmente, por dos tipos de razones:

— De un lado, razones de orden matemático (que es la división), razones de tipo psicológico (cómo comprenden o qué entienden los alumnos por división), razones de tipo epistemológico (qué hay en la base del conocimiento que permita el aprendizaje de la operación, cómo llega a producirse ese aprendizaje).

— De otro lado, razones de tipo didáctico general: qué enfoque metodológico dar al aprendizaje, qué técnicas y materiales emplear.

Las experiencias que se han efectuado sobre el aprendizaje de la división no son casuales sino que cada una, a pesar de sus diferencias, tiene un fuerte soporte argumental de cualquiera de los tipos antes citados.

Teniendo en cuenta las aportaciones de la psicología cognitiva, nuestra preocupación para este trabajo ha estado centrada en lo didáctico: encontrar una didáctica que favorezca el desarrollo progresivo de las operaciones matemáticas desde el nivel inicial hasta su dominio.

El objetivo de este capítulo es describir el camino que recorre el aprendizaje de la división aritmética desde su inicio hacia el II.° nivel del Ciclo Inicial, hasta su dominio hacia los niveles IV.° y V.° del Ciclo Medio. Está elaborado sobre la base de varias experiencias, principalmente sobre una continuada durante cuatro cursos con el mismo grupo de alumnos.

I. INICIACION

La didáctica empleada se caracteriza por concretarse alrededor del siguiente esquema metodológico, esquema del que ya se ha hablado en el capítulo III:

1) Se parte de una situación surgida en la clase o provocada por el maestro, quien la problematiza.

2) Se intenta solucionar individual, grupal o colectivamente.

3) Las soluciones encontradas se exponen, se discuten y se selecciona el mejor modo de hallar la solución correcta.

4) Trabajo individual.

La característica más importante es la creación colectiva del código matemático apropiado para expresar las situaciones o para resolverlas.

Es lo que llamamos proceso de simbolización y que queda suficientemente explícito a lo largo de este trabajo.

LA DIVISION COMO PARTICION EN SUBCONJUNTOS EQUIVALENTES Y COMO REPARTICION.

En la iniciación al aprendizaje de la DIVISION como tal operación matemática, es conveniente partir tanto del bagaje experiencial previo de los alumnos como de lo que estos pueden llegar a hacer. Partir un todo continuo (un objeto) en montoncitos iguales o un conjunto (grupo de objetos) en montoncitos equivalentes son dos acciones habituales cuyo soporte psicológico es parecido.

Parecen anteriores, más habituales incluso, y menos dificultosas las acciones de **repartir.** Este tipo de acciones tienen una diferencia esencial con respecto a las de **partición:** conllevan una equidistribución. Compárense estos dos ejemplos:

a) Partir un montón de 9 monedas en tres montoncitos iguales.

b) Repartir por igual 9 monedas entre tres cajitas.

Sin embargo, y a pesar de la diferencia, ambas modalidades de acciones tienen una misma expresión numérica: 9:3 = 3.

Se sabe que este es uno de los primeros obstáculos en el aprendizaje de la división. En la experiencia que se expone a continuación se trata de solventar dicho obstáculo simultaneando ambas modalidades y, partiendo de ellas, ir creando la expresión simbólica apropiada, para, más tarde, operar a nivel simbólico exclusivamente.

> *«Con motivo de un reparto de cromos que Iñaki, su propietario, no sabía hacer, algunos niños propusieron aprender a dividir, «hacerlo como los mayores», cosa que fue aceptada y nos dedicamos sistemáticamente a ello. Expliqué que utilizando material de*

la clase (corchos, botones y conchas de la playa) y haciendo unos juegos que yo conocía, aprenderíamos pronto a dividir.

A cada uno dí un puñado de botones que colocaría en su mesa. La consigna u orden a realizar la daba yo. La norma del «juego»: que los subconjuntos debían ser equivalentes.

Las ordenes eran de dos tipos:

— Coged un conjunto de «tantos» elementos. Partirlo en «tantos» subconjuntos equivalentes.

— Coged un conjunto de «tantos». Repartirlo entre «tantos» niños, a ver cuántos dáis a cada uno.

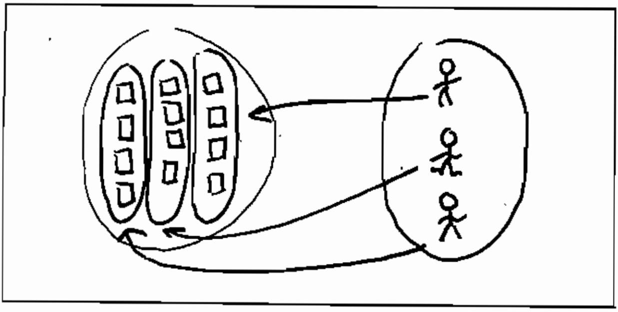
Simultaneaba ambos tipos de consignas para que vieran su semejanza. Después variamos el «juego»: uno inventaba una orden y los demás la ejecutaban (siempre cantidades pequeñas).

El juego se fue complicando a medida que iban adquiriendo agilidad en el reparto del material. Ahora uno inventa un problema y los demás tratamos de resolverlo ayudándonos del material, es decir, manipulando. Pero además lo representa cada uno gráficamente, «dibujamos lo que hacemos con las manos».

He de decir que, debido a los trabajos anteriores sobre conjuntos y la multiplicación, ya tenían cierta experiencia en representaciones gráficas y conocían la necesidad de una única simbolización para todos. Las diferentes representaciones de un mismo problema se exponían en la pizarra. Se discutían y, de este modo, se iba acordando progresivamente la «manera de dibujar los problemas».

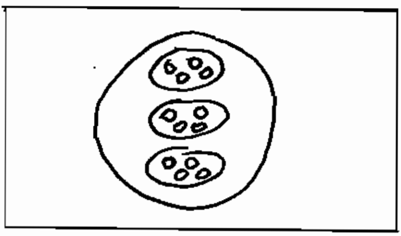
Así, un problema o historia como, por ejemplo, «Iñasi tenía 12 cromos y los repartió a sus tres hermanos», tenía al principio una representación de tipo figurativo: solían dibujar a Iñaki con sus doce cromos y a los tres hermanos, cada uno con su paquetito de cromos correspondiente.

A instancias más de que si iban a dibujar siempre a los niños nos cansaríamos y tardaríamos mucho en hacer los problemas, fueron paulatinamente apareciendo otro tipo de representaciones ya con algunos signos como muestra la siguiente figura:



Convinimos que las rayas (diagramas) eran para separar, las flechas, según su autor, para «darle a cada uno su montón», es decir, indican la equidistribución.

Pero al día siguiente, la simbolización del mismo problema quedó mucho más simplificada pues Jesús. un alumno, nos convenció a todos con la suya.

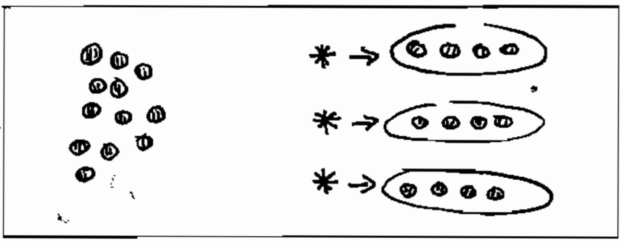


Ciertamente, como decía, él, «no hace falta dibujar los niños porque así se entiende el problema».

Jesús en realidad habia transcrito lo que había hecho manualmente con los botones. Pero su representación, aunque más sencilla y aceptada por todos, se *mostró bastante dificultosa para algunos niños en problemas posteriores y prefirimos mantenernos en simbolizaciones del tipo anterior.*

Concluimos el proceso con la estandarización de un tipo que incluía el conjunto inicial, el operador y el conjunto final o resultado de la acción.

De este modo, el mismo problema de hace unos días quedaba representado así:



De la misma manera que es importante ponerse de acuerdo en la simbolización, también lo es acordar una forma de expresar con palabras los problemas, «para poder comprendernos».

La verbalización no consistía sólo en inventar y exponer problemas o en participar en las discusiones, sino también en, recíprocamente, la explicación de un problema ya representado.

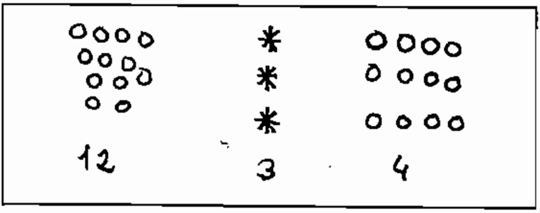
Si el problema era simplemente tener un montón de botones, por ejemplo, de 12 y dividirlo en tres subconjuntos (ya sabíamos que debían ser equivalentes), la expresión debía ser más o menos: «tenía un conjunto (o montón) de 12; lo he dividido en 3 subconjuntos (o partes o montoncillos) y cada uno (cada subconjunto, cada parte, cada montoncillo) tiene 4 elementos», Las palabras entre paréntesis son opcionales pero la estructura era invariable.

Si el problema era del tipo de «repartir entre», por ejemplo: «Sonia trajo 12 pulseras y las repartió entre Sokunde, Irune y Leire», una vez realizado manual-

mente y dibujado, se expresaba así: «había 12, como hay tres niñas tenía que hacer tres partes (o subconjuntos o montoncillos) y a cada uno le daba 4 pulseras (cada subconjunto tiene 4 elementos)».

En la verbalización no sólo es importante convenir los términos y las expresiones. Lo fundamental es percatarse de que todos los problemas ó historias tienen tres partes: hay una situación, se hace algo y resulta otra situación.

La etapa siguiente, en la cual cambiamos de material y de juegos, fue expresar los problemas con números. Para facilitar el camino representábamos primero gráficamente el problema y debajo colocábamos los números correspondientes. En el caso del ejemplo que vengo exponiendo la representación quedaba así:



Por último, la representación de historias, problemas o manipulaciones se redujo a su expresión numérica.

Las representaciones numéricas se fueron agrupando en torno a estas tres modalidades (si seguimos con el ejemplo anterior).

a) 1 2 3 4

b) 1 2 3 ---→ 4 + 4 + 4

c) 1 2 ---→ 4
3

Las simbolizaciones muestran que dos aspectos de la expresión están superados:

— La horizontalidad y progresión de izquierda a derecha.

— Que la expresión tiene tres partes.

— Faltaba el más importante: el operador.

Fuimos viendo que tal y como proponían era difícil leer sus expresiones, que no se entendían bien porque faltaba un signo que representara lo que haciamos con las manos o lo que pasaba en la historia.

Después de varios intentos el signo elegido fue una recta inclinada: /; «porque es como partir» decían: La flecha de las anteriores representaciones quedó suplida por el signo «=», que ya usaban con las otras operaciones. Pero aunque los signos ya están convenidos, la clave de las dificultades está ahora en la lectura de las mismas, cuestión que provocó discusiones muy interesantes.

Si habíamos resuelto un problema en el que había que dividir, por ejemplo, un conjunto de 15 elementos en 3 subconjuntos, la expresión correspondiente realizada por algunos 15/3 = 5 era rebatida por la mayoría porque según ellos, «15 dividido en 3 subconjuntos no es 5 porque no puede ser», «porque es 5 + 5 + 5, «porque aunque hagas los montones tienes todavía 15 y no 5», etc.

Puesto que nadie pudo explicar por qué el resultado del problema lo escribió así: «5» yo intenté explicarlo pero al no parecer convincente mi explicación estuvimos un tiempo expresando los problemas con expresiones numéricas del tipo.

15 / 3 = 5 + 5 + 5.

Quiere esto decir en mi opinión:

a) Que la expresión 15: 3 = 5 es muy sintética y no comprendida pues 5 se refiere realmente a «cinco elementos cada conjunto». Me pareció que la sintetización la deberían ir construyendo ellos progresivamente para lo que sería necesario hacer abstracción del material y hacer hincapié en los aspectos gráficos y lingüísticos.

b) Que la expresión numérica es narrativa pues condensa simbólicamente unas acciones real o mentalmente efectuadas.

c) Que la lectura de estas expresiones conlleva la reconstrucción mental de las acciones hechas o imaginadas. Por ello empezamos a utilizar el término de «historia de dividir» junto con el de «problemas de dividir».

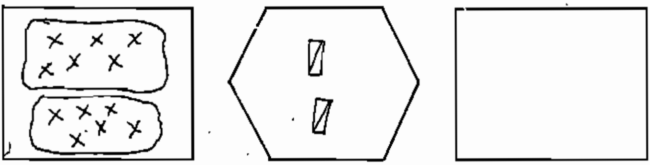
Una tarde, con sorpresa para todos, una de las alumnas nos argumentó que escribíamos los problemas de una manera rara. Su hermana, mayor que ella, le había dicho que había que poner entre los números dos puntitos y no una raya, como hacíamos nosotros.

Varios corroboraron esa afirmación porque habían visto a sus hermanos. No hubo más remedio que votar el signo y quedó establecido el universal de los dos puntos. El proceso de simbolización colectiva lo dimos por terminado.

A partir de aquí, el trabajo dejó de ser fundamentalmente colectivo. Nos dedicamos al cálculo y a generalizar lo que habíamos aprendido, abandonando el material definitivamente y utilizando fichas preparadas por mí, en las cuales se alternaban ejercicios referentes también a multiplicar.

Se adjuntan algunos tipos de ejercicios:

— Completa el dibujo de este problema:

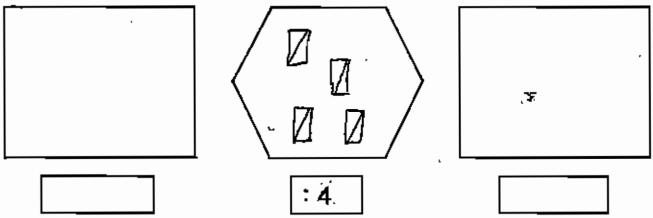
a) 

b) *— Completa esta expresión numérica:*

12: 2 = ...

c) *— Completa este problema:*
Tenía 12 pesetas. Las repartí entre dos niños...

— Completa estos dibujos:

d) 

---

e) *— A ver cómo dibujas este problema:*
Tengo 20 lápices. Los reparto por igual en 4 cajas. Tendré...... en cada caja.

— Ahora yo dibujo un problema. Después tú lo escribes con palabras:

f)

---

g) *— Escribe con números el problema anterior.*

---

h) *— Dibuja este problema:*
30:5 = 6

---

i) *— Inventa un problema para esta expresión y lo escribes con palabras:*
18 : 3 = 6

Si se observan con atención los modelos de ejercicios, (no he transcrito los específicos de cálculo) se puede advertir que hacíamos especial hincapié en las representaciones gráficas y en las expresiones escritas (palabras) de problemas.

La razón es para resaltar el término «cada». En las expresiones «a cada uno», «en cada caja pongo», «para cada uno», y similares está la clave de la equidistribución y, lo mismo que sucedió en la iniciación a la multiplicación, la deficiente comprensión de ese término en los niños de bajo desarrollo verbal (cuatro de nuestra clase) es un obstáculo para la total comprensión de la operación. Ese era el motivo, creo, por el que se esforzaban en argumentar que «quince dividido entre tres no era igual a cinco», sino igual a cinco más cinco, más cinco. Por eso, la expresión verbal que hubimos de adoptar iba siempre acompañada de «cada».

Por ejemplo, en 8: 2 = 4 no leíamos «ocho dividido entre dos igual a cuatro» sino «ocho entre dos igual a cuatro cada uno».

El relato anterior corresponde a una experiencia didáctica desarrollada en el aula de 21 alumnos de II.° curso. Ha centrado el aprendizaje de la operación en al simbolización de la misma, proceso, como se ve, en el que confluyen todos los fenómenos que se dan en el aprendizaje matemático.

El que la didáctica se centrara en el proceso de simbolización se debe a:

— Creer que una operación matemática es, en principio y a nivel infantil, una acción.

— Que la matemática es, fundamentalmente, un lenguaje creado a partir de acciones y que, una vez construído posee, sus leyes propias.

— Que el proceso de creación de ese lenguaje es el motivo central desde el que hay que abordar la iniciación a las operaciones.

Ese proceso debe desarrollarse sistemática y ordenadamente.

II. PROFUNDIZACION

La operación DIVISION, a nivel de iniciación, parece ser asimilada con menor dificultad que la MULTIPLICACION. Pero a medida que se va ampliando el marco de situaciones y problemas, se complejiza de tal modo que MULTIPLICACION y DIVISION, aun teniendo cada una su simbología y verbalización propias, son indisociables. La comprensión y uso de una se apoya en la comprensión de la otra y viceversa. Es importante tener esto en cuenta para el trabajo didáctico.

En el discurso de este capítulo destacamos los aspectos que se refieren a la DIVISION pero hay que verlos dentro de un contexto más amplio: operaciones multiplicativas.

La asimilación y avance en el aprendizaje de la DIVISION descansa sobre una fase de iniciación sólida, al modo en que se ha relatado en la experiencia de II.° curso. Y además se apoya en:

— Avance paralelo en la capacidad de cálculo y manejo del sistema numérico. Es importante la memorización de las tablas de multiplicar y la comprensión de los algoritmos.

— Reversibilidad de las operaciones de equidistribución, por lo que el tratamiento de la multiplicación debe ser paralelo.

— Extensión a otros campos: iniciación a expresiones fraccionarias, magnitudes, etc.

El avance debe verse globalmente. De este modo la didáctica de la operación abarcará todos los aspectos. De lo contrario, como es demasiado frecuente, el fracaso es ineludible.

De las experiencias recogidas hemos extraído un esquema de trabajo que consideramos válido para la etapa de aprendizaje posterior a la INICIACION, que, generalmente, coincide con el actual primer nivel de Ciclo Medio. El esquema se refiere sólo a la DIVISION y, para mayor claridad, separamos los tres aspectos a trabajar sistemáticamente. La metodología propuesta es la misma que en la etapa de iniciación.

1) Manipulaciones

A.— Con material discontinuo hacer subconjuntos equivalentes. Las consignas son de creciente complejidad.

B.— Representación gráfica de cada manipulación o problema. Creación colectiva o recreación de los signos apropiados.

C.— Juegos de reversibilidad. Por ejemplo, «el adivino».

Cada niño tiene un conjunto (material discreto) y lo divide a discreción pero sin comunicar a nadie su operación.

A continuación todos corren un puesto, cambian de mesa. A la mesa que llegan se encuentran ya una partición hecha. Su misión es averiguar el conjunto inicial y el operador que usó el niño que antes estaba en la mesa. Después rehace nuevamente el montón anterior y efectúa otra partición, y así sucesivamente rotando.

D.— Trabajo individual previamente preparado relativo a lo tratado colectivamente.

2) Grafismos y verbalizaciones

A.— Analizar las tres partes de cada problema, situación o acción. Representaciones similares a las vistas en el nivel de iniciación.

B.— Sustituciones de una o dos partes del problema por otras, a modo de juego.

Por ejemplo: (si se decide que permanezca el mismo resultado). «Había 8 palomas. Las cogimos y las metimos en dos jaulas. En cada jaula habrá.......»

En este problema, cuya expresión es 8:2 = 4, sustituirán dos partes:

— **Había 8 lápices; se los repartieron dos niños.** Cada niño toca a 4 lápices. La expresión numérica sigue siendo la misma 8:2 = 4, pero los dos problemas son diferentes.

3) Aspecto aritmético.

A).- Introducción del concepto de **operador**, que no es otra cosa que la acción, pero simbolizada (obsérvese como en los tipos de ejercicios de la parte de INICIACION el operador está en un hexágono para diferenciarlo). Al analizar las tres partes de un problema (de las que siempre se conocen dos) se verá que siempre hay una situación inicial, algo que pasa (acción) y resultado.

A nivel numérico eso ya no es exactamente así, sino que hay, **simbolizados**, un conjunto inicial, un operador, un conjunto final.

Es recomendable, aunque más abstracta, la terminología:

estado 1 -------- operador -------- estado 2

B.- Invención de problemas directos y juegos sencillos.

C.- Problemas sobre operadores inversos a los multiplicativos.

Es conveniente que para la resolución no se apoyen en material sino en el conocimiento de las tablas de multiplicar. Por ello los operadores deben ser de una cifra, el estado inicial un número inferior a 100 y divisible por el operador para evitar de principio complicaciones adicionales.

D.— Resolución de expresiones numéricas en las que falte uno de los términos, del tipo:

$$12 : \ldots = 4$$

$$18 : 6 = \ldots$$

$$\ldots : 5 = 15$$

E.— Invención de problemas diversos.

Las etapas de asimilación de la operación no se corresponden cronológicamente con el orden en que se han expuesto los tres aspectos anteriores. Cierto es que a una fase manipulativa le sigue otra gráfica (lingüística). Y que finaliza el proceso cuando todo lo anterior queda aritmetizado. Pero la construcción es simultánea y global: hay que barajar los tres aspectos aunque hay cierto orden de sencillez a complejidad en ello. La especificidad de cada situación y grupo de niños nos indica en todo momento en qué aspectos incidir y cuándo.

Proponemos tratar aspectos de manipulación, simbolización y aritmetización lenta y concienzudamente y no pasar a etapas superiores pero sí ir simultaneando lo anterior con la ejercitación individual en la mecánica calculatoria y en la resolución de problemas.

Conviene destacar un factor del que hasta ahora no hemos hablado: la importancia del texto escrito en el aprendizaje matemático. El uso del lenguaje escrito del tipo del usado en los libros de texto escolares es criticado y criticable por muchas razones, en las cuales no nos vamos a detener. Pero es obvio que el texto escrito es útil para muchos alumnos si es significativo para ellos, esto es, si conecta tanto con los conceptos y esquemas que ya poseen como son sus gustos e intereses.

Hay aulas en las que a posteriori de una experiencia o suceso significativo (cumpleaños, formación de grupos, etc), el maestro elabora cuadernillos en los que problematiza, por escrito, esas situaciones u otras similares. Vamos a ver dos de los cuadernillos utilizados en un aula de tercer curso. Los cuadernillos están confeccionados en tamaño cuartilla por lo que transcribiremos situando dos de sus páginas en una de las nuestras y las numeraremos para evitar confusiones al lector.

El primero de ellos se refiere a la idea de **operación inversa** y el segundo a la **prueba de la división.** Podrá comprobarse cómo su contenido, redacción e intencionalidad didáctica difiere totalmente de un libro de texto habitual.

1

1) Tienes 5 cajas. En cada caja hay 6 botones. ¿Cuántos botones tienes en total?.

¿Qué operación has hecho para resolver el problema? Seguramente habrás escrito 5 x 6 = 30. Está bien, pero ahora fíjate en el siguiente problema:

2) Tienes 30 botones. Los repartes en 5 cajas. ¿Cuántos metes en cada caja?.

¿Qué operación has hecho?
¿Es la contraria a la del primer problema?.

2

En el primer problema multiplicaste:

5 x 6 = 30 botones

En el segundo dividiste:

30 : 5 = 6 botones en cada caja.

¿Es dividir lo contrario que multiplicar?

Fíjate:

$5 \xrightarrow{\times 6} 30$; $30 \xrightarrow{:5} 6$

Se dice que dividir es la operación **inversa** de multiplicar.

3

¿Lo vas entendiendo?
Si no lo comprendes bien vuelve a leer lo anterior.
Si crees que vas entendiendo sigue adelante.

3) Tienes 4 cajas de rotus. En cada caja hay 6 rotus. ¿Cuántos rotus tienes en total?.

A ver si eres capaz de hacer el problema inverso y escribirlo con números.

4

Tienes un número cualquiera, por ejemplo, el 4. Le aplicas el operador «multiplicar por 5» y obtienes otro número que será el 20.

Eso se escribe así:

est. 1	op.	est. 2
4	x5	= 20

Puedes hacer la operación inversa; o sea, a 20 le aplicas el operador inverso «dividir entre 5» y vuelves a llegar al 4.

est	op.	est
20	:5	= 4

5

También puedes escribir así:

$$4 \underset{:5}{\overset{x5}{\rightleftarrows}} 20$$

A ver si eres capaz de resolver los siguientes problemas.

Escribe lo que falta.

$$3 \underset{\cdots\cdots}{\overset{x5}{\rightleftarrows}} \cdots\cdots \qquad 6 \underset{\cdots\cdots}{\overset{x4}{\rightleftarrows}} \cdots\cdots \quad 10 \underset{\cdots\cdots}{\overset{x3}{\rightleftarrows}} \cdots\cdots$$

¿Son difíciles?.

6

Estos son un poco más difíciles.

x 8 → ..... ←	..... x 7 → 21 ←	..... x 6 → 18 ← ....
8 ...... → 32 ←	7 ...... → 56 ←	..... x9 → 81 ← ....

7

La operación inversa de multiplicar es ....

La operación inversa de dividir es ....

Divide 100 entre 10

¿Qué haces para volver a tener cien si tienes 10?

1

Este librito es para aprender bien a hacer la prueba de las divisiones.

Haz estas divisiones:

30: 3

30: 4

— ¿Te sobra algo en la primera división?
Por eso se llama ....

— ¿Te sobra algo en la segunda?
Por eso se llama ....

2

¿Cómo hacer la prueba de las divisiones inexactas?.

Tú sólo lo puedes descubrir.

Haz esta división:

28 : 3

Ahora tú solo intenta hacer la prueba, pero explicándolo con números.

3

Irene propone hacer la prueba así:

28 : 3 = y sobra 1 porque 9 + 9 + 9 = 27

y luego le sumo 1 que me sobrará; así: 27 + 1 = 28

¿Has entendido?

Irene sigue explicando: «y puedo escribir así: 28 : 3 = 9 y sobra 1 porque (9 + 9 + 9) + 1 = 28».

Si has comprendido y éstas de acuerdo haz esta división y su prueba: 16: 3

4

Pero Alicia hace la prueba así:

«28 : 3 = 9 y sobra 1 porque 3 x 9 = 27
y luego le sumo 1 que me sobraba.

Además puedo escribir 28 : 3 = 9 y
sobra 1 porque (3 x 9) + 1 = 28».

¿Has comprendido?

Haz esta división: 16 : 3 y haces la prueba como Alicia.

5

Resuelve estas divisiones y comprueba cada una de ellas:

27 : 4	85 : 8	195 : 6

Intenta hacer las pruebas de las dos maneras.

6

Haz estas cuentas con sus pruebas: A la derecha escribes E si la división es exacta ó I si es inexacta.

49 : 7	
53 : 6	
154 : 3	

7

Si contestas bien a las preguntas es que ya sabes dividir.

«Txutxi ha traído una bolsa de 97 caramelos y los ha repartido por igual entre las 9 chicas de la clase. Luego, los que le sobraron los repartió entre Julen y Manolo. Después, Txutxi se comió lo que volvió a sobrar.

— ¿Cuántos caramelos correspondieron a Sonia?
— ¿Cuántos se comió Julen?
— ¿Cuántos se comió Txutxi?

III.- LOS ALGORITMOS

Normalmente los algoritmos surgen en el aula como una necesidad. Si la organización y la dinámica son abiertas aparecen situaciones cuya solución precisa la utilización de algoritmos, pues el cálculo mental de los alumnos se muestra incapaz para solventarlas.

El momento de su tratamiento sistemático no puede predecirse ni programarse; es la evolución del aprendizaje del grupo quien lo determina.

De cualquier manera, la didáctica que proponemos, al favorecer la investigación personal, no contriñe la resolución de situaciones a una única forma válida sino que posibilita diferentes vías.

La narración que adjuntamos de un maestro del III.º curso es ilustrativa:

«En marzo, a propósito de un cumpleaños, el maestro de al lado nos trajo dos barras de turrón. Como todos querían comer del turrón, teníamos el problema de cómo repartir las barras equitativamente. La situación era aprovechable y propuse lo siguiente:

«Nos vamos a dividir en dos grupos: el de las chicas y el de los chicos. (Las chicas eran 8 y los chicos 10). Cada grupo va a buscar una o varias formas de repartir bien el turrón. El grupo que no encuentre alguna forma de repartirlo bien se queda sin turrón, a no ser que el grupo ganador le quiera dar».

Los chicos fueron los primeros en querer exponer como repartirían el turrón. Y lo hicieron sobre la pizarra.

Transcribo las formas de repartir más apoyadas.

F.: «Cogemos una barra, la partimos en 10 partes y luego la otra en otras 10 iguales y cada uno cogemos 2 trocitos».

J. A.: «Como somos 10 chicos, pues coges una barra y las repartes entre 5 chicos y luego la otra, la repartes entre los otros 5».

Pareció evidente que todos comerían la misma cantidad de turrón. Donde residían las dificultades era en la explicación simbolizada, dificultades que algunos intentaron solventar apoyándose en dibujos y flechas.

Las chicas, en su reparto, ofrecieron propuestas similares pero encontraban también mucha dificultad en la explicación simbolizada de sus propuestas, si bien estaban convencidas de sus propuestas, si bien estaban convencidas de que si el reparto se hacía bien, de cualquiera de las formas propuestas comerían todas igual cantidad.

Fue una experiencia valiosa que domostró:

— que no hay una única manera de repartir,

— que aunque repartes de varias formas, tocas a la misma parte de turrón,

— que todas las maneras propuestas se pueden explicar con palabras y con números.

Para que se fueran habituando a apoyarse en otras grafías, no sólo las conocidas, al resolver y expresar problemas nuevos, les preparé fichas con situaciones parecidas a la anterior siguiendo el modelo de las LIBRETAS PROGRAMADAS editadas por el M.C.E.P.

Con una segunda experiencia intentaba ponerlos en una situación que les mostrara la necesidad de algún «truco», algunas técnicas operatoria para dividir números «grandes».

Grupos de a cuatro. Cada grupo debe repartirse las piezas de una caja de Bloques Lógicos, o sea, debían repartir 48 piezas entre 4. Después cada grupo exponía cómo había hecho el reparto. No era válido *repartirse las piezas según el color o la forma (conocían los bloques de antemano) sino «pensando sólo en el número de piezas».*

Los tanteos fueron muy diversos y las formas de repartir también. Sin embargo, todas tenían como denominador común dos características:

a) Repartir paso a paso, tanteando. Unos optaban por coger de primera vez muchas piezas, corrigiendo cuando veían que faltaban piezas para todos. Otros hacían a la inversa: iban cogiendo de cada vez para cada uno subconjuntos de pocas piezas hasta repartir el montón total.

b) Recontaban y sumaban para comprobar si habían hecho bien, después de repartir aproximativamente mediante cálculos, «con la cabeza». En adelante utilizaríamos este segundo método para adentrarnos en divisiones más complicadas, y proseguimos:

«¿Seríamos capaces de repartir ahora las piezas de la caja pero sin tocarlas y sin verlas?» Les proponía con ello hacer lo mismo que antes pero forzándolos a utilizar anotaciones.

Efectivamente, resolvían el problema mediante cálculo mental, partiendo y recomponiendo el total de la cantidad inicial, en muchos casos con acierto, pero no les fue posible escribir lo que hacían mentalmente, a pesar del tiempo que le dedicamos a ello.

Propuse entonces trabajar con los BLOQUES ARITMETICOS MULTIBASE.

Es ésta la tercera de las tres experiencias que mencionó y que resultó clave para poder dividir con números de cierta dificultad.

Cada grupo cogía una caja de material de la base que quisiera, entresacaba unas cuantas piezas, la cantidad de piezas sacada debían repartirlas entre los miembros del grupo.

Pero ¿como dividir una placa entre 4, o entre 3, o ...?, ¿y un bloque?, ¿y un bloque, una placa y dos barras, por ejemplo?,...

¡ Había que cambiar por piezas que, juntas, tuvieran un valor equivalente! Ese fue el descubrimiento capital que, después de muchos tanteos hicieron algunos y comunicaron luego a los demás.

En una fase posterior debían repartir las cantidades que yo indicaba y en su cuaderno escribir como habían efectuado el reparto.

Fue ésta una experiencia que llevo tiempo pero mereció la pena pues descubrieron:

— *Que las piezas tienen que estar ordenadas de mayor a menor, como «cuando escribimos números», y conviene empezar a dividir por la mayor, o sea, por la izquierda.*

— *Que las piezas que te sobran de un nivel las tienes que pasar al nivel siguiente, pero partidas, y sumarlas con las de ese nivel.*

— *Que al dividir con números exclusivamente, sin piezas, hay que hacer lo mismo.*

— *Que al terminar no te pueden sobrar más unidades o igual que el número por el que estás dividiendo porque entonces hay que repartirlas.*

Estos son los descubrimientos, a mi entender, que posibilitaron encontrar la técnica para operar con números cualesquiera».

La técnica operatoria aprendida en el aula citada ha sido practicada en otras y tenemos constancia de su validez. En realidad, como sucede en la suma o en la resta, consiste en trasladar al nivel numérico lo que manualmente se hace con el material estructurado. Requiere, eso si, un conocimiento previo del material y una concepción diferente del algoritmo.

En otras aulas se ha utilizado otro material similar al de Dienes elaborado con palillos de polo. En este material la unidad viene representada por la décima parte del palillo, la decena por el palillo, la centena por 10 palillos pegados sobre un trozo de cartulina, etc.

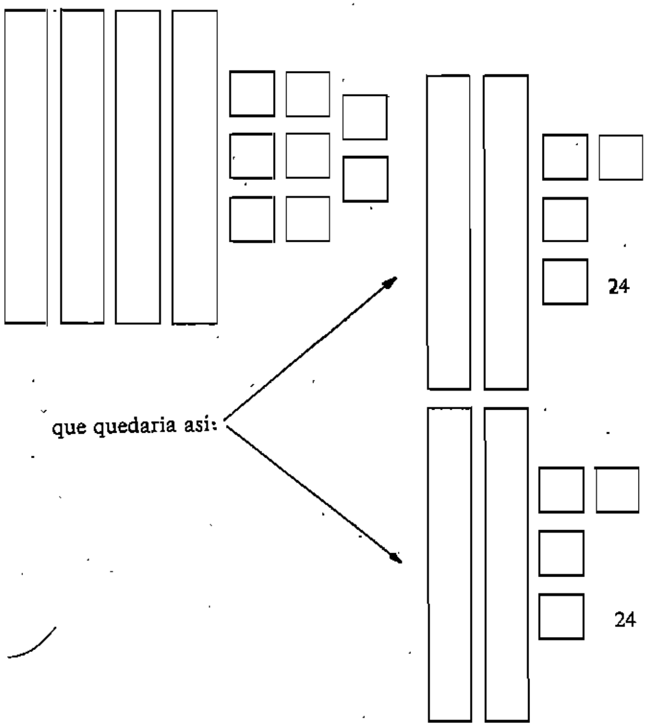
Veamos cómo se efectuan las cuentas segun esta didáctica:

Sea por ejemplo, 48 : 2

No es necesario escribir 48 | 2

A nivel de iniciación, el niño coloca primeramente el material correspondiente sobre la mesa y lo reparte:

Sería:



Después efectúa con números

48 : 2 = 24

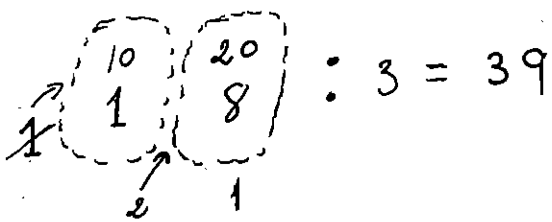
Verbalizando: «4 decenas entre 2 unidades, a dos decenas, y 8 unidades entre 2 a cuatro unidades».

Sea ahora el número 118 : 3

Colocará el material y lo repartirá. Forzosamente la centena ha de descomponerla en sus diez decenas, que unidas a la otra decena son 11 decenas. Ahora ya puede repartirlas, cosa que antes no podía hacer; las reparte pero le sobran dos decenas que descompondrá en unidades, 20, que junto con las 8 existentes son 28, que las dividirá entre tres, sobrándole una unidad que ya no puede repartir.

A nivel numérico seguirá el mismo proceso para lo cual le recomendamos que se apoye con señalizaciones al mismo tiempo que va verbalizando.

118 : 3 quedaría así:



Compárese esta técnica de dividir con la tradicional, verbalizaciones incluídas, y podrá apreciarse, además de las evidentes diferencias, que ambas son producto de dos concepciones de la didáctica matemática no ya distintas sino diametralmente opuestas.

El aprendizaje de las técnicas operatorias en la perspectiva que defendemos, cuyo objetivo primordial es el dominio del sistema numérico de base 10, forma un todo coherente hasta el final del Ciclo Medio. En los otros capítulos puede verse que la suma y la multiplicación se efectúan recomponiendo; la resta y la división (divisor de una cifra), por descomposición.

Es conveniente recordar que a lo largo del Ciclo Medio se extiende el aprendizaje del sistema métrico decimal (medidas de longitud, masa y capacidad principalmente). Su comprensión descansa en el conocimiento del sistema numérico de la misma base, base diez, y, recíprocamente, los trabajos escolares con magnitudes son una fuente inagotable de experiencias físicas para la asimilación del sistema. El dominio de los mecanismos del sistema (valor de posición, crecimiento multiplicativo, etc), favorecen el desarrollo operatorio y capacitan para aprendizajes ulteriores.

La didáctica de las operaciones que se fundamenta en trucos mnemotécnicos, como es la habitual, bloquea el progreso en el aprendizaje matemático.

La adquisición de las mecánicas calculatorias, como tantos otros capítulos de la matemática, no puede ser un fin en si mismo, por muy importante que sea. Hemos de tener un horizonte más ámplio y tomar este capítulo u otros como motivos para el desarrollo de la creatividad, de la divergencia y de la originalidad, de la capacidad de leer e interpretar correctamente una escritura matemática y de crear otra personal. Este es el sentido que tiene la elaboración de cuadernillos como los mostrados en el párrafo anterior. Aquí vamos a ver dos nacidos de dos experiencias: una de diferentes propuestas de repartir y otra de «El mago y el gato», una obrita de teatro creada y representada por la misma clase.

1

Tenemos 96 cromos de aves y se los quieren repartir los que investigan aves que son 3: Iñaki, Zugaitz y Jose Angel.

Iñaki dice:

«Vamos cogiendo por orden. Yo cojo 3, luego Zugaitz coge 3 y después José coge 3 y otra vez empezamos. Yo cojo otros 3, Zugaitz otros 3, José otros 3. Seguimos cogiendo hasta acabar el conjunto de 96 cromos».

¿Crees que la manera que propone Iñaki es una buena manera?.

2

Zugaitz opina que tardarán mucho tiempo y propone hacerlo de otro modo:

«Como 96 es 90 + 6, pues primero dividimos 90 entre los 3 y luego hacemos lo mismo con 6.

$$\left.\begin{array}{l} 90 : 3 = 30 \\ \quad y \\ 6 : 3 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow 30 + 2 = 32 \text{ cromos a cada uno.}$$

Iñaki ------→ 32
Zugaitz ---→ 32
Jose ------→ 32

Total 96

3

¿Cúal de las dos maneras te parece mejor, la de Zugaitz o la de Iñaki?.

A ver cómo repartes tú 63 botones en 3 cajas. Explícalo ayudántote con flechas o lo que quieras.

4

Pero José no estaba de acuerdo con Iñaki ni con Zugaitz y dice:

«Yo propongo hacerlo de una manera más corta. Como 96 es 8 decenas + 6 unidades hago así:

$$\left.\begin{array}{l} 9 \text{ dec.} : 3 = 3 \text{ dec.} \\ \quad y \\ 6 \text{ u.} : 3 = 2 \text{ u.} \end{array}\right\} \rightarrow 32$$

Y así 96 : 3 = 32 para cada uno.

¿Te parece bien esta manera?
¿Por qué?

5

¿Has entendido la manera de dividir que propone Jose?

Para comprobar tú mismo si lo has comprendido divide como Jose 93 en 3 partes.

6

Haz de la manera que prefieras las siguientes cuentas:

84 : 2	66 : 3	84 : 4

7

Los encargados de la cooperativa han ido a comprar 3 tijeras para el taller.

Han gastado 396 ptas.

¿Sabrías averiguar lo que costó cada tijera?.

Inténtalo.

8

Ellos han pensado así:

396 es 3 cent + 9 dec. + 6 unidades. Dividiremos poco a poco.

3 cent : 3 = 1 cent.
9 dec : 3 = 3 dec.
6 u : 3 = 2 u.

132

Después ordenamos los números así: 132

Así 396 : 3 = 132 ptas cada tijera.

¿Habías hecho tú así el problema?

Si lo tienes mal vuelve a hacerlo.

9

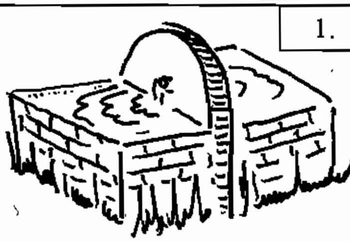
A ver si eres capaz de hacer estas cuentas:

848 : 4

639 : 3

1.

Esta es la fuente de Arraño



Igor ha contado los anfibios que viven en ella: Tritones, renacuajos, salamandrejas etc...

En la parte de la izquierda dice que hay 75, y en la de la derecha 11.

2

Pero Igor quiere que en cada parte haya la misma cantidad de anfibios.

¿Qué crees que tendrá que hacer Igor?.
Explícalo paso a paso.

3

Estaba pensando Igor en cómo repartir los anfibios cuando, inesperadamente, apareció el mago con su gato.

No te preocupes, muchacho, -dijo el mago- Mira como lo hago yo:

Primero 75 + 11 = 86; después 86 : 2
Pero, ¿cómo haré 82 : 2?
Pues como 86 = 8 decenas + 6 u. hago así:

8 dec : 2 = 4 dec.
6 u : 2 = 3 u. 4 dec + 3 u. = 43
y así 86 : 2 = 43

4

— Gracias, mago -dijo Igor-.
— No, no me des las gracias. Te someteré a tres pruebas. Si las superas podrás venirte con nosotros a recorrer mundo.

PRUEBA N.° 1

Divide, paso a paso, 97 en tres partes.

5

El gato quiso ayudar a Igor pero el mago se lo impidió diciéndole:

— No, no le ayudes. Los resultados los encontrará en la página 7.

PRUEBA N.° 2

Ahora partirás en 3 montones las monedas de esta bolsa.

En la bolsa hay 999 monedas.

6

PRUEBA N.° 3

Tienes tres vasijas llenas de vino. En una hay 46 litros, en otra 20 y en la tercera 23. Todo ese vino tienes que repartirlo por igual en 2 toneles.

Si te sobra algo, para tí.

7

PRUEBA N.° 1

97 = 9 dec + 7 u

9 dec : 3 = 3 dec

7u : 3 = 2u y sobra 1u

3d + 2u = 32

97 : 3 = 32 y sobra 1

PRUEBA N.° 2

999 = 9 cent + 9 dec + 9 u.

9c : 3 = 3c

9d : 3 = 3d

9u : 3 = 3u

3c + 3d + 3u = 333

999 : 3 = 333

PRUEBA N.° 3

46 + 10 + 23 = 89 litros; Como 89 = 8d + 9u

dividido 8d : 2 = 4d → 4d + 4u = 44 y sobra 1 litro

9u : 2 = 4u y sobra 1

89 : 2 = 44 y sobra 1 litro

8

El mago preguntó a Igor:

— ¿Has superado las pruebas, muchacho? - Y además dijo: Todo aquel que quiera venir con nosotros tendrá que hacer las cuentas siguientes:

27 : 2	45 : 4	89 : 8	963 : 3

Y después dibujarnos. Para eso les dejamos las hojas siguientes.

9
10
11

12

RESULTADOS

27 : 2 = 13 y sobra 1
45 : 4 = 11 y sobra 1
89 : 8 = 11 y sobra 1
963 : 3 = 321

«Si has hecho bien las cuentas puedes marchar con ellos a recorrer mundo».

IV.- DOS TIPOS DE DIVISION

En los capítulos de la resta y la multiplicación hemos visto que existen situaciones muy diversas pero que, a pesar de ello, se formulan con la misma expresión numérica y se resuelven con el mismo algoritmo. De ahí que analizáramos los distintos tipos de resta y las diferentes situaciones de multiplicación. Sabemos que en ello reside una de las mayores dificultades en el aprendizaje de las operaciones.

Vamos a hacer lo mismo con la división.

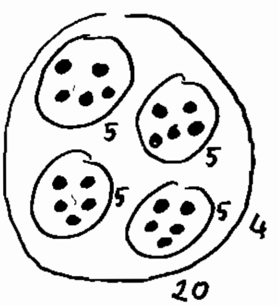
Agruparemos las distintas situaciones o problemas en dos grupos:

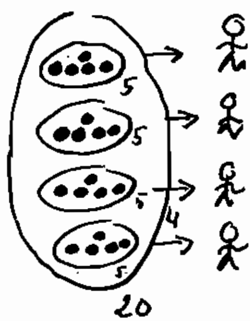
a) Problemas de repartición y/o de partición.

b) Problemas de agrupamientos.

Tomemos un ejemplo: «Juan tiene 20 caramelos y los reparte entre sus cuatro amigos». La incógnita será hallar cuántos da a cada amigo.

Si el problema lo analizamos a nivel gráfico veremos que puede tener esta representación:





Si efectuamos el reparto normalmente observaremos que disponemos de un conjunto inicial de 20 elementos y hacemos 4 subconjuntos que tendrán 5 elementos cada uno.

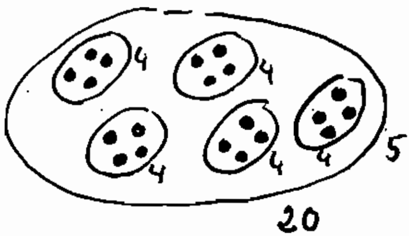
Y si expresamos el problema a nivel aritmético tendremos esta expresión:

$$20 : 4 = 5$$

Donde vemos que el dividendo, 20, es el conjunto total de elementos; el divisor, 4, se refiere al número de subconjuntos y el cociente, 5, se refiere a los elementos de cada conjunto.

Veamos ahora este otro problema:

«Juan tiene 20 caramelos. Hace montones de a cuatro caramelos cada montón». La incógnita en este caso es hallar el número de montones que tendrá Juan. Su representación gráfica puede sera así:



Si resolvemos manualmente el problema tendremos inicialmente un conjunto de 20 elementos que los agruparemos en subconjuntos de 4 elementos obteniendo 5 subconjuntos.

A nivel aritmético, su expresión es, sorprendentemente, idéntica a la del ejemplo anterior:

$$20 : 4 = 5$$

en donde el dividendo, 20, es el conjunto total de elementos. Pero ahora el divisor, 4, se refiere a los elementos de cada conjunto y el cociente, 5, indica los conjuntos que obtendremos.

Vemos, de este modo, que los dos problemas son muy distintos y a pesar de eso tienen la misma escritura aritmética. En resumen nos encontramos con dos tipos de división:

DIVISION A

Cardinal total elementos	: Cardinal del conjunto de conjuntos	= Cardinal de cada conjunto

Ejemplos:

1. Tengo 15 caramelos y los reparto entre 3 amigos ¿cuántos doy a cada amigo?.

2. Las 12 flores que tenía las repartí por igual entre 4 floreros. ¿Cuántas flores metí en cada florero?.

3. Una cuerda que mide 40 cm., la parto en 4 trozos iguales ¿Cuánto mide cada trozo?.

4. En clase somos 24. Formemos 6 equipos.

DIVISION B.

Cardinal total de elementos	: Cardinal de cada subconjunto	= Cardinal del conjunto de conjuntos

Ejemplos:

1. Tengo 15 caramelos. Si doy 3 a cada amigo, ¿para cuántos amigos habrá caramelos?.

2. Tenía 12 flores y las agrupé de tres en tres, ¿cuántos grupitos obtuve?.

3. Una cuerda mide 40 cm. si la corto en trozos de 4 cm. cada uno, ¿cuántos trozos obtendré?.

4. En clase somos 24 personas. Si formamos equipos de seis miembros, ¿cuántos equipos haremos?.

Es curioso que los adultos habitualmente no hagamos distinción entre un tipo de división y otro; dada una situación la resolveremos aplicando el esquema operatorio aritmético.

Sin embargo para los niños resultan ser problemas totalmente distintos, en principio, y que requieren distinto modo de resolución.

Se debe, creemos, a que aun no han generalizado el esquema operatorio de la división convirtiéndolo en válido para los dos modelos de problema.

Permanecen al nivel de lo real y lo concreto.

Los dos tipos de división llegan a confluir en el único tipo existente, la división aritmética, al final de un proceso de abstracción que comienza en la toma de conciencia de las acciones que efectuamos al resolver un problema y termina en la utilización del lenguaje numérico como herramienta para resolver cualquier situación.

¿Cuál es el camino que conduce a los alumnos de un extremo a otro?. Trataremos de indicarlo.

Es habitual comenzar por la división de tipo A (partición y/o repartición) por la sencilla razón de que se basa en acciones que los niños ejecutan con más frecuencia y de las cuales ya hemos hablado. Con este tipo de problemas se construye el lenguaje simbólico de la operación y se ejercitan los alumnos en los primeros cálculos. Pasada esta etapa conviene ampliar el campo de estudio a situaciones o problemas del tipo B, bien porque surgen en el aula, bien porque son introducidas por el maestro. Con este tipo de división seguiremos el mismo proceso que con el anterior (ver páginas anteriores).

Los alumnos llegan a la conclusión de que necesariamente se ha de utilizar el mismo esquema operatorio en este segundo tipo de problemas que en el primero. En otras palabras, que dividir es partir algo en partes iguales, repartir un todo y también hacer subconjuntos equivalentes (partir, repartir, hacer agrupamientos).

Podemos comenzar por situaciones reales que provoquen conflicto. Por ejemplo, hacer equipos:

«En clase hay 30 alumnos. Hacer seis grupos». Y seguidamente: «Somos 30, hagamos equipos de a seis niños cada equipo».

Con material diverso podremos igualmente realizar sencillos problemas que faciliten la comprensión de ambos tipos de división. El factor fundamental es lingüístico, verbal. Por eso habrá que poner énfasis en la expresión. Es conveniente retornar a la línea de trabajo expuesta en los anteriores capítulos consistente en:

1. Inventar problemas, «historias».

2. Dada una expresión numérica, inventar para ella un problema de un tipo y otro de otro.

Así si tenemos la expresión:

$$30 : 5 = 6$$

Caben historias tan dispares como:

«Tenía 30 pesetas: hago montones de a cinco pesetas y me salen 6 montones, 6 duros».

3. Resolver ecuaciones sencillas en las que falte un término verbalizando el niño qué hace para hallar el término que le falta. Partiremos de aquellas en las que para hallar la incógnita se apoyan en la tabla de multiplicar:

$$42 : Z = 7$$
$$Z : 8 = 4$$

para llegar a otras en las que necesitan apoyarse en una convención, un «truco»:

$$65 : Z = 11$$
$$Z : 10 = 12$$

Veámos esto último con detenimiento. Si el esquema tripartito de todo problema ha sido interiorizado se sabe que el primer número, dividendo es el cardinal total de elementos, «el número grande». El segundo, divisor, es el operador. Entonces para hallar Z en Z : 10 = 12, da igual el tipo de división que sea, es decir, da lo mismo que el operador 10 se refiera a número de conjuntos o número de elementos de cada conjunto puesto que 10 conjuntos de a 12 elementos cada uno nos da el mismo número que 12 conjuntos de a 10 elementos cada uno. Trascendemos ya el nivel de lo concreto y nos apoyamos en la conmutatividad como propiedad aritmética.

para hallar Z en

$$65 : Z = 11$$

tenemos dos caminos:

a) Uno, que es al que los niños tienden inicialmente, consistente en multiplicar 11 por 3, por 4, por 5 y así sucesivamente hasta alcanzar el número 65.

b) Otro, que podemos hacer que lo descubran mediante manipulaciones de material y que consiste en dividir 65 por 11, sabiendo que nos da igual que 11 se refiera a los elementos de cada conjunto como que se refiera a los conjuntos resultantes.

Hay que convencerse de que la mera resolución de tiras de ejercicios de ecuaciones no conduce a nada si no hay una comprensión de los mismos. No facilita el proceso de abstracción. Por el contrario, trabajar los tres puntos citados en el sentido que proponemos va posibilitando que cada alumno, en la medida de sus posibilidades, construya paulatinamente su propio esquema operatorio a partir de lo concreto.

V.- CAMBIOS EN LOS ALGORITMOS

En el capítulo de la SUMA hablamos de la importancia que tiene la comprensión del sistema de numeración. En el de la RESTA incidimos en lo mismo proponiendo el modelo de sustración por descomposición del sistema. En el de la MULTIPLICACION adjuntamos la experiencia «el truco de los números» para destacar que es fundamental el conocimiento del sistema. En los primeros cursos, pues, los algoritmos han de asentarse sobre bases firmes dando una importancia secundaria a la velocidad en la ejecutoria de cuentas.

Consecuentemente nos encontramos con que a finales del Ciclo Medio los alumnos tienen un perfecto conocimiento del sistema. Entonces podremos recurrir a técnicas ó modelos de resolución que agilicen la ejecutoria de cuentas.

Todas las técnicas operatorias o «trucos» se basan en las propiedades de las operaciones, cosa que en este nivel es ya asequible a los niños.

A propósito de la división por más de una cifra conviene cambiar la técnica de restar, sustituyendo la que hasta aquí han venido usando por la tradicional. Las experiencias que se han hecho al respecto han mostrado que el cambio es rápido y no supone ninguna dificultad a los alumnos. Conseguido el cambio en la resta podremos aplicarlo a las cuentas de dividir por dos o tres cifras puesto que efectuar estas divisiones con la misma técnica que las divisiones por una (descrita en páginas anteriores) es demasiado embrollado, largo y dificultoso. Sobra decir que el cambio no puede ser gratuito. Conviene que esta nueva manera de operar sea comprendida - que no simplemente memorizada - para lo que son suficientes unas pocas sesiones.

Por otro lado nos encontramos con el hecho de que el estudio de las operaciones se desprenden ciertos «trucos» que los alumnos pueden descubrir y que además les resulta placentero. Son «trucos» tradicionales como, por ejemplo los siguientes:

a) Para multiplicar un número cualquiera por otro que sea 10, 100, 1000 etc., basta con añadir al primero tantos ceros como tenga el segundo.

b) Las siguientes multiplicaciones también tienen su «truco»:

2435	20	56	784
x 2001	x 30	x 400	x 11

c) Igual sucede con estas divisiones:

80 : 4; 420 : 60; 120 : 10

Insistimos en que los «trucos» aparecen al final del proceso como consecuencia del conocimiento de la operatoria y por la necesidad de abreviar la cuenta. A veces hacemos un flaco servicio a los alumnos adelantándonos nosotros a los hechos.

IV e

Números con coma

Tres son las formas más frecuentes de introducción de los números con coma hacia el final del Ciclo Medio.

a) Como expresión de magnitudes. Las experiencias realizadas, por ejemplo, con medidas de longitud son aprovechadas para introducir notaciones como 3,5 m. 1,25 m. etc. En casos como éstos, la coma separa a la unidad de medida de su submúltiplos y se procura que los alumnos guarden siempre la equivalencia entre expresión 1.25 m. y la expresión 1 m. , 2 dm. 5 cm.

b) Fracciones y decimales. Desde este enfoque se aprecia la notación decimal como otra forma de expresar ciertas fracciones. Inversamente una expresión decimal puede expresarse mediante una fracción.

   Esta forma de introducir números con coma parece ser más artificiosa a juicio de los alumnos y ofrece dificultades.

c) Los números con coma son introducidos por necesidad en problemas de reparto, es decir, aquellas situaciones que se resuelven mediante división no exacta cuyo resto hay que repartir.

   Por ejemplo si tratamos de repartir 7 pasteles entre 5 personas. Corresponde un pastel a cada persona pero además sobran dos pasteles que habrá que repartir necesariamente también entre cinco personas.

Esas tres formas son caminos diferentes de adentrarse en el campo de los números con coma. En realidad la comprensión y uso real de dicho tipo de números necesita de los tres enfoques pues, ciertamente, se usan en situaciones métricas, fraccionarias y de reparto.

No parece eficaz el aprendizaje de números con coma tratando simultaneamente los tres enfoques. Si bien los tres son necesarios, como la didáctica de dichos números necesita un tratamiento específico y sistemático, hay que optar por uno de ellos. La elección está condicionada por la dinámica que se viva en el aula, nivel de los alumnos y conocimientos anteriores que posean.

La experiencia que se describe a continuación ha sido realizada con una clase de 29 alumnos de los V.° y VI.° juntos. Posteriormente fue aplicada a otros grupos de 18 alumnos de VII.ı y VIII.° que no sabían operar con decimales.

> *En clase (cursos V y VI) llevamos tres meses dedicados fundamentalmente a DIVIDIR etc.*
> *Ha llegado el momento de ampliar el campo de las operaciones que normalmente realizamos. Por lo que planteé la cuestión de repartir todo, es decir, no dejar las divisiones con resto inacabadas y nos aventuramos en la problemática de «cómo repartir lo que sobra».*

ETAPAS DE LA EXPERIENCIA

I.- PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS SENCILLOS MANIPULABLES.

Les resultaba bastante complicado, cuando no imposible repartir restos. En problemas, incluso siendo reales, de repartir, por ejemplo, 13 caramelos entre 4 niñas. Parecía imposible repartir con exactitud el caramelo sobrante. Las soluciones espontáneas son de tipo fraccionario:

— «Pues se parte en cuatro cachos y damos uno a cada una».

Naturalmente no parece verse la necesidad de los decimales toda vez que el reparto de los restos podían hacerlo siempre, aunque claro, al principio fuese algo costoso. La salvedad era la exactitud de los repartos y sobre todo ¿cómo hacerlo con números?.

Sabían, por el aprendizaje de la división, que habíamos trabajado manipulativamente, que lo que hacemos en el algoritmo con cifras es una transcripción de lo que previamente hacemos con las manos. Por esta razón les propuse atrevernos a repartir los restos manipulativamente a ver si descubríamos alguna manera de representarlo con números, al igual que en las divisiones anteriores.

Como material utilizaremos cuartillas. Cada uno dispone sobre su mesa de un montoncito de ellas.

Planteó, para efectuar manipulativamente lo siguiente:

— «Coged cinco cuartillas. Vamos a repartirlas entre dos niños, sin que sobre nada».

«Coged ahora 7 cuartillas y repartirlas entre dos niños». Y varios problemas similares sucesivamente.

Las propuestas que aparecen sobre cómo repartir la cuartilla sobrante coinciden: la cuartilla se divide por la mitad y se da una mitad a cada niño.

Pero evidentemente, eso no es una expresión decimal por lo que complico algo más los problemas para ver si descubren la necesidad de los decimales.

— «Cojamos 5 cuartillas. Vamos a repartirlos entre 4 niños».

Coinciden en que la cuartilla sobrante se divide en cuatro trozos iguales. Así cada niño toca a una cuartilla entera y un trozo de ella.

«Ahora vamos a repartir 8 cuartillas entre 3 niños».

Esto es más complicado porque ahora lo restante son dos cuartillas enteras que habrá que repartir entre 3 niños. La respuesta mayoritariamete aceptada es dividir la primera cuartilla en tres trozos y repartirla. Después coger la otra, dividirla en otros tres y repartirla también.

Proseguimos efectuando manualmente problemas sencillos y llegamos a una conclusión: «siempre se puede repartir el resto; lo que sobra de las divisiones ya no sobra porque se reparte».

Sin embargo no ha surgido la necesidad de lo decimal.

II.- PASAR DE LA REALIZACION DEL PROBLEMA MANIPULATIVAMENTE A LA REALIZACION DEL MISMO CON NUMEROS.

Los problemas son sencillos y realizables con cuartillas.

«repartir 13 cuartillas entre 4 niños».

Lo efectúan manualmente dividiendo la cuartilla sobrante en cuatro trozos. Ahora deben hacer con números lo que han hecho con las manos. Las expresiones numéricas que aparecen son de estos tipos:

a) $\begin{array}{l|l} 13 & 4 \\ \hline 1 & 31 \\ 0 & \end{array}$ *b) 13 : 4 = 3 y 1*

En el tipo a) el resultado es 31. Pero ¿31, qué? ¿cuartillas?, ¿más cuartillas de las que había al principio?.

El tipo b), después de discutir sobre las escrituras del tipo a), se ve como erróneo por todos. Planteó hacer algunos problemas más para ver si encontramos una manera de expresar con números lo que hacemos con las manos, pero que sea válida. Ahora quien quiere inventa un problema y lo dice a la clase.

Juan dice este. «Vamos a repartir 9 cuartillas entre 4 niños».

Lo realizan y después escriben. Varios lo escriben así:

$\begin{array}{l|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 / 1 \end{array}$

Y explican a la clase sobre la pizarra que la raya es para separar las cuartillas enteras de los trozos. Rosa dice que los mayores también hacen eso pero que en lu-

gar de la raya ponen una coma, cosa que parece muy bien a todos y concluímos en que para separar las cuartillas de los trozos pondremos una coma.

Pero realmente el resultado anterior, 2/1 es incorrecto. En notación decimal sería 2 enteros y 25 trocitos (centésimas) a cada niño. El uso de la expresión 2/1 indica que continúan repartiendo el resto a nivel fraccionario pues ese 1 se refiere a 1/4 de la cuartilla sobrante. No obstante algo positivo hemos hallado ya: la conveniencia de separar las cifras representativas de las cuartillas de las cifras representativas de los trozos.

Proseguimos el juego. Uno dice un problema, lo hacemos con el material y lo representamos con números haciendo uso de la notación convenida.

Ninguno parece advertir que la escritura que usan es errónea.

Se observará que los alumnos no proponen escritura fraccionaria para repartir el resto, lo cual es debido a que no hemos profundizado aun en la temática de fracciones.

III.— LA NECESIDAD DE LOS DECIMALES.

Se me ocurre que quizás, llevándolos a una situación de conflicto, puedan percatarse de sus errores y buscar otro modo de repartir. Propongo lo siguiente:

«Vamos a hacer seguidos los problemas que he pensado. Haremos primero uno, lo escribiremos con números, y dejamos las hojas sobre la mesa. Después con otras hojas, haremos el segundo.

A ver si descubrimos algo nuevo».

El primer problema es repartir 11 cuartillas entre 5 niños. Lo efectúan y escriben así:

2,1 (2 cuartillas y un cabo a cada uno, explican).

El segundo es repartir 5 cuartillas entre 2 niños lo hacen y escriben. Sorprendentemente la escritura es también:

2,1

Ante la sorpresa, comienzan las discusiones.

Vemos que sus escrituras son las mismas en ambos problemas pero no sucede igual con las cantidades de papel dadas a cada niño. Comparan los trocitos del primer problema con los trocitos del segundo. Es un conflicto: unos intentan argumentar en contra de la notación anterior mientras otros callan.

Planteo entonces la cuestión sobre la pizarra, a nivel numérico:

A Rosa le doy 3,2 (ellos leen 3 cuartillas enterasy dos cachos).

A Manoli le doy también 3,2

Y escribo así:

3,2 ----------→ Para Rosa.

3,2 ----------→ Para Manoli.

Salen Rosa y Manoli de clase y les doy realmente tres cuartillas y dos trozos a cada una pero los dos de Rosa son mayores que los de Manoli.

— «¿A quién he dado más papel?, ¿he dado a las dos la misma cantidad?.»

El debate sobre el problema es muy interesante.

Después ellas muestran las cuartillas y trozos que yo les entregué.

Vamos llegando de este modo a la idea de que los trozos deben ser iguales, «para que los números sean verdaderos», dicen. Esto es, que sean expresión de lo real.

¿Cómo conseguiremos que todos los trozos sean iguales en las divisiones?.

María José propone:
Dividiendo la cuartilla que sobre en las mismas partes siempre, todos en 8 ó todos en 5 ó en las que sean, pero en las mismas partes y así saldrán iguales.

Los que se han dado cuenta de la necesidad de ello votan afirmativamente mientras otros callan o asiente, lo cual lo aprovecho para proponer que dividamos siempre en 10 partes la cuartilla sobrante.

Manipulamos de esta nueva forma y transcribimos algunos problemas más que previamente había preparado teniendo en cuenta sus progresivas dificultades: cantidades manipulables y que no se llegará a centésimas.

No parece difícil desprenderse del hábito anterior por el nuevo: partir cada cuartilla del resto en 10 partes en lugar de como lo hacían antes. Es cambiar una convención por otra.

IV.- ENTEROS, DECIMALES.

A partir de aquí la resolución de problemas adquiere rápidez. Efectuamos unos pocos manipulativamente y a continuación con números.

Después realizamos otros ya sólo con números.

Donde si incidimos es en la lectura de los resultados. Convenimos en leer, a propuesta mía con los términos enteros y décimas. Por ejemplo: 4,5 se lee «4 enteros y 5 décimas». Y trato de hacer hincapié en cuestiones como:

—¿Cuántas décimas necesitas para formar un entero? ¿Y para formar dos?.

— ¿Cuántas décimas tiene un entero? ¿y dos?

— ¿Cuántas décimas tiene un medio entero?

— ¿De dos enteros cuántas décimas salen?.

Siempre con el material ante ellos, aunque muchos no lo necesiten manejar, para contestar a mis preguntas.

V.- OPERATORIA

Operar con decimales es un reto porque eso significa saber operar como los alumnos de cursos superiores. Por ello les planteo si serían capaces de operar con decimales, ahora que ya saben como son.

Lo intentamos. Vamos a operar con números, sin material. Planteo la siguiente situación:

«S. e I. se ponen de pie. S Tiene 2,7 cuartillas e I. tiene 3,8 cuartillas. ¿Cuánto tendrán entre los dos?.

Sólo unos pocos dudan dónde colocar cada cifra para sumar o que hacer con tantos decimales. Pero sus dudas se disipan cuando lo vieron hacer a otro compañero en la pizarra.

Sigamos: «Entre S e I. tienen 6,5 cuartillas, pero pasa D. y les roba 2,3».

Nadie tiene dificultad en efectuar la sustracción.

«Javier tiene 5 veces más de lo que tiene S. e I. Ahora. A ver cuánto papel tiene Javier». Multiplicar es igualmente fácil.

«Pero Javier reparte sus cuartillas entre 5 amigos». A ver cuánto da a cada uno.

Puesto que la resolución de esos problemas y sus cuentas no ofrece obstáculos, nos dedicamos a hacer cuentas de los 4 tipos pero sólo utilizando décimas. Cuando en alguna cuenta alguien encuentra dificultad procuro que la resuelva primero con material y luego con números.

VI.- LA CENTESIMA

Hasta ahora sabemos solo unas pocas cosas:

Que todo lo que sobra se puede repartir, que ponemos coma para separar, que dividimos en 10 décimas y poco más. Pero hay algunos problemas algo más dificultosos y a ellos nos vamos a dedicar, no sin antes ejercitarnos en el cálculo con decimales (hasta décimas) y algunos sencillos problemas.

Aprovechamos para ello algunos ejercicios de un libro de texto y una libreta autocorrectiva que utilizan en espacios de tiempo libres.

La cuestión de las centésimas ha surgido al encontrarse en el libro de texto con números de 2 decimales (no conocían el término «centésima» y lo aprovechamos para trabajar sistemáticamente.

Cada alumno dispone de un grupo de cuartillas.

Propongo el problema siguiente para hacerlo manipulativamente «Repartir 13 cuartillas entre 4 niños».

En efecto, todos concuerdan en que tocan a 3 cuartillas cada niño y algo más. Las discrepancias se producen en el reparto de la cuartilla sobrante.

Las diferentes formas de repartir propuestas pueden agruparse en dos tipos:

a) Doy tres cuartillas a cada uno. La que sobra la divido en 10 décimas y doy dos a cada uno. Como me sobran dos décimas las reparto en 4 trozos y así doy 10 décimas y un trozo a cada uno.

Esta forma de repartir muestra que no se ha asimilado plenamente la convención de repartir siempre en diez partes cada cosa sobrante.

b) Solo tres alumnos. La cuartilla la partimos en 10 décimas, las reparto y me sobran dos décimas. Esas décimas las divido también en 10 partes más pequeñas («cachillos») y, como tengo 20, pues doy 5 a cada uno. Por eso decimos 2 décimas y cinco «cachillos» a cada niño.

Intento entonces, que vean como más conveniente esta última forma y propongo que lo hagamos así en el siguiente problema:

«Repartir con las manos 17 cuartillas entre 4 niños».

No hay dificultades en hacerlo por lo que pasamos a representar con números lo que hemos hecho con las cuartillas.

Nuestra atención la dirigimos ahora a expresar bien lo que hacemos con los números y en los sucesivos problemas, que son sencillos, pues yo los había programado, nos dedicamos a la verbalización de lo que hacemos.

VII.— OTRA FORMA DE REPARTIR.

En mi opinión, la forma anterior de repartir, si bien se ajusta al algoritmo de la operación con decimales y facilita el reparto normal, no me parece muy apropiada para llegar al concepto de centésima (1). Propongo en consecuencia otra manera de hacer los repartos.

Tenemos folios (por ser más aptos estos para dibujar) y el folio sobrante en lugar de cortarlo lo rayaremos («que es como cortarlo»). «Repartimos 5 folios entre 4 niños». Rayamos el folio sobrante. Subdividimos con rayas las dos décimas que faltan por repartir. Luego expresamos con números lo hecho.

$$
\begin{array}{l|l}
5 & 4 \\ \cline{2-2}
10 & 1{,}25 \\
\;\;20 & \\
\;\;\;\;0 &
\end{array}
$$

Aparece un problema de lectura.

¿Como leer 1,25? Efectivamente, todos coinciden en leer «un entero y veinticinco». ¿Pero veinticinco, qué? ¿De dónde sale veinticinco? ¿El 2 que representa? ¿y el 5?.

Lo unico que aparece como evidente es que los trozos del 2 son grandes y los del 5 son pequeños.

El debate nos lleva al punto siguiente:

¿Cuántos cachillos tiene cada décima? ¿Es como si dividiésemos el folio en 100 partecillas?.

Para que se convenzan los dudosos cortamos el folio en 100 trocillos.

A cada trocillo llamamos centésima y hacemos algunos ejercicios de cuantificación y equivalencia:

—¿Cuantas décimas forman una décima? ¿y dos, tres,...?

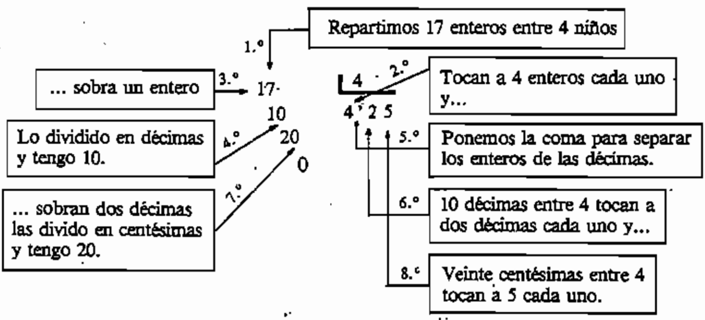
—¿Cuántas centésimas habrá en tres, dos, cuatro... décimas?.

—Sobre mayor que y menor que, etc.

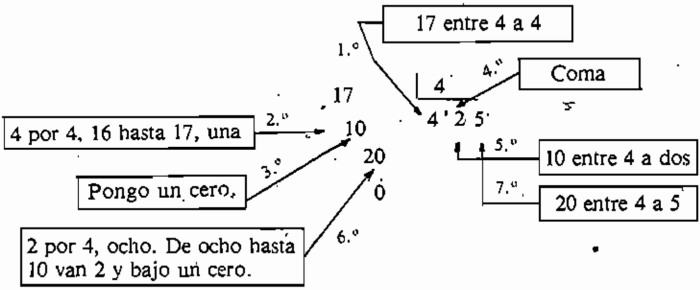
Al tiempo que abordamos esas cuestiones ponemos énfasis en la expresión verbal del algoritmo que acompaña a cada problema.

Es interesante percatarse de que el algoritmo representa, paso a paso, lo que efectivamente hacemos, con los folios. Y de que necesita un apoyo verbal; una lectura.

Hacer la cuenta transcribiendo lo que hemos hecho o haríamos con las manos, o bien leerla explicativamente después de hecha, favorece la comprensión siempre que se haga en el sentido que decimos. Nuestra lectura es como sigue:



Compárese lo anterior con esta otra lectura



Cuando el apoyo verbal queda convertido en una cantinela puede que se consiga mayor rapidez en la mecánica operatoria, pero se obstaculiza indudablemente la comprensión del proceso y por tanto las posibilidades de aprendizaje creativo.

VIII.— TRABAJO INDIVIDUAL — MILESIMA.

La interiorización de las convenciones acordadas entre todos, no es automática. Es en el trabajo personal cuando tiene lugar un proceso de recostrucción de lo realizado grupalmente, de reconstrucción de nociones, de memorización de términos, de superación de dificultades menores pero nuevas y de construcción personal del esquema operatorio.

Las posiciones de las cifras, las equivalencias de distintas expresiones numéricas, algunas dificultades en la ejecución de cuentas etc, son as-

pectos parciales que se solventan mejor en el trabajo individual. La clase colectiva queda, pues, para descubrir algo entre todo o para convenir términos, expresiones (lenguaje) o modos de operar.

Siguiendo esta dinámica, algunos niños han podido solventar individualmente ejercicios de milésimas que han encontrado en el texto y en la libreta autocorrectiva sin necesidad del grupo de clase. Han ampliado el esquema operatorio a milésimas. Otros, por el contrario, han necesitado manipular material.

El material empleado ha sido piezas de madera hechas segun el modelo del material multibase de Dienes (material que no conocían). El bloque lo hemos tomado como unidad; placa, barra y centímetro cúbico como décima, centésima y milésima respectivamente. Unos pocos tanteos y ejercicios con ese material han bastado para que conceptualizaran la «milésima y calcularan con cierta agilidad aquellos, la mayoría, que no habían llegado a la idea de milésima por si sólos.

IX.— LO QUE FALTA.

La operatoria decimal no acaba en el trabajo que hasta ahora hemos hecho. Abarca un campo más ámplio de situaciones y se aplica en muy diversas ocasiones. Nosotros nos hemos limitado, casi, a situaciones de repartir. La relación con fracciones, con situaciones métricas y otras cuantificaciones la hemos obviado premeditadamente con el fin de facilitar el aprendizaje. Pero ciertamente el aprendizaje de lo decimal no es firme hasta tanto no se generalice lo que ahora hemos aprendido y se construya un esquema válido para cualquier situación ya sea de reparto, métrica o fraccionaria.

La clase se compone de 29 alumnos con edades comprendidas entre los 10 y 15 años. Es un grupo heterogéneo y muy peculiar. El trabajo hasta ahora realizado nos ha llevado dos semanas, o sea, unas pocas sesiones colectivas. El tiempo de trabajo individual, al ser libre, no es posible computarlo. Al término de este tiempo realizamos una prueba objetiva (en el sentir de los alumnos es un examen para que «nos demos cuenta de si vamos aprendiendo o no») compuesta por 25 items. Los items, se referían a aspectos de:

— Cuantificación: (¿cuántas milésimas necesitas para formar media décima?).
— Equivalencias: ¿Qué es más, una unidad o mil milésimas?.
— Simbolización: Expresar con números e inversamente interpretar una expresión dada.
— Operatoria con las cuatro operaciones a nivel de iniciación.
— Un grupo de 5 dió más de 20 respuesta positivas. Otro de 4 dió por debajo de 15. El resto estuvo entre 15 y 20 respuestas acertadas.

Por consiguiente hay un grupo muy numeroso que encuentra dificultades aunque sean pocas y no fundamentales sino aspectos parciales, en la mayoría de los casos.

Se me presentan, en este momento del desarrollo del trabajo, dos opciones didácticas:

a) Continuar con el trabajo matemático de decimales extendiéndolo a otros campos considerando que las dificultades encontradas por algunos alumnos serán resueltas con el tiempo por ellos mismos.

b) Dedicaremos al tratamiento específico de las dificultades ya individualmente ya en pequeños grupos, si es que es posible detectar y diagnosticar el tratamiento de las dificultades.

X.— LAS DIFICULTADES.

a) Hay, para algunos, dificultades de tipo lingüístico.
El parecido fonético entre décima, centésima y milésima obstruye, a veces, la comprensión de una pregunta o impide una buena expresión prefiriendo usar términos como «cacho», «cachillo más chico», etc. La falta de desarrollo lingüístico les lleva a no asociar esos términos como derivados de diez, cien y mil. Sin embargo estas dificultades lingüísticas no incapacitan para resolver problemas, operaciones ó manipulaciones.

b) Otras dificultades son de tipo simbólico:
— No ver ciertas equivalencias por ejemplo entre 0,2 y 0,20.
— Dudar sobre la colocación de las cifras y el valor de estas al operar.
— No saber pasar una expresión del lenguaje oral al numérico, por ejemplo, expresar numéricamente dos centésimas más una milésima.

c) Tanto las dificultades de simbolización como las de cuantificación y equivalencias tienen, a mi entender, mucho que ver con la asimilación defectuosa del sistema numérico de base diez, sobre todo en los aspectos de crecimiento multiplicativo y valor posicional de las cifras. ¿Cómo es posible que algunos duden o yerren, aún teniendo el material a disposición, en cuestiones como «a cuántas centésimas equivalen 8 décimas» o «a cuántas milésimas equivalen 3 décimas».

Las dificultades surgidas a propósito del estudio de números decimales tienen causas que no son debidas a este tema, sino anteriores y más profundas y generales. Detenernos en el trabajo y tratarlas específicamente desde la perspectiva de los números con coma no sería, en mi opi-

nión, conveniente. Por el contrario, elegir la opción a) ofrece la posibilidad de nuevas experiencias. Es de esperar que trabajar los números con coma en situaciones diversas, no exclusivamente de reparto, como hasta ahora hemos hecho, les ayude a superar a cada uno sus dificultades. En consecuencia opté por la opción primera.

XI.— EXPRESIONES METRICAS

Tras el intervalo de una semana y a propósito de un trabajo sobre el pueblo (plano del pueblo) nos dedicamos a mediciones lineales y pretendí aprovecharlas para correlacionar este nuevo trabajo con el anterior de decimales.

Reconstruímos experimentalmente (se midieron calles y edificios, se hicieron con cuerdas decámetros y hectómetros, ...) el esquema de los múltiplos y submúltiplos del metro, cosa que gran parte ya había olvidado.

La novedad ahora es la expresión decimal.

La introduje en mediciones cortas haciendo ver la necesidad de separar unas cifras de otras.

Como esquema gráfico de apoyo usamos el siguiente:

	Hm.	Dm.	m.	dm.	cm.	mm.
millares	centenas	decenas	enteros	decimas	centèsimas	milesimas

Algunos alumnos lo colocaban en sentido vertical, otros en horizontal, otros lo cortaban y ponían las casillas en escalera, e incluso otros «en espejo», con notación decimal incluída.

El uso de la coma, las cuantificaciones y equivalencias entre distintas expresiones y la operatoria la practicamos individualmente con ejercicios tomados de unos libros de texto preparados por mí.

El trabajo de estos días ha servido para generalizar y afianzar el esquema decimal que habíamos construído con las experiencias de los repartos de restos.

XII.— LAS DIFERENTES DIVISIONES

Después de un mes en que las matemáticas habían dejado de trabajarse debido a que iniciamos un trabajo sobre Andalucía, retornamos a ellas y al tema de decimales con motivo de unas libretas de cálculo decimal que compramos a propósito.

La mayor dificultad que presentaban eran algunas divisiones. Por ello decidí trabajarlas sistemáticamente.

La metodología empleada es la misma que al principio: situación búsqueda de resolución manipulado, expresión numérica verbalizada, generalización.

En los cuatro modelos de división fuí intercalando problemas de división como reparto o partición y división como expresión de agrupamientos.

1.— MODELO A: enteros en el dividendo y en el divisor. Problemas del tipo: «repartir 7 cuartillas entre 4 niños»; «repartir 1 cuartilla entre 8 niños». Hacer los repartos manipulativamente no es arduo ni su transcripción después del trabajo de los meses anteriores, por lo que incido fundamentalmente en la explicación oral de las cuentas de cada problema. Veáse la verbalización mencionada en páginas anteriores.

*2.— **MODELO B: decimales en el dividendo y enteros en el divisor.** Por ejemplo «repartir 8,5 cuartillas entre dos carteras». La forma adoptada por todos fue repartir primero los enteros y luego las décimas. Una observación importante a tener en cuenta es que la manipulación es necesaria sólo hasta el momento en que cada niño ve con claridad lo que ha de hacer al operar con cifras. Las primeras manipulaciones son imprescindibles pero su exceso aburre e incluso puede obstaculizar el desarrollo operatorio.*

Por esta razón comenzamos con problemas directos fáciles para ascender en complejidad y sólo utilizaba el material como apoyatura el que lo necesitaba. Por ejemplo, para resolver:

«Tienes ocho cuartillas y media. A ver si eres capaz de repartirlas entre estos 17 compañeros de clase».

La cuenta necesaria es 8,5 |_17 pero su resolución resulta imposible con lo que sabemos hasta ahora. Experimentalmente se vió la idea de que sólo era posible resolver el problema si las ocho cuartillas las partíamos en décimas. Entonces tendremos 80 décimas más la otras 5 y podremos hacer el reparto. Pero entonces el resultado obtenido no serán enteros porque lo que repartimos son décimas.

A través de otros problemas del mismo tipo y cuentas fue interiorizándose la norma de subdividir lo indicado en el dividendo en unidades más pequeñas y después operar, lo cual no es precisamente aquello de que «se corre la coma tantos ...».

*3.— **MODELO C: Enteros en el dividendo y decimales en el divisor.** Ejemplos: «con diez cuartillas hacer montones de a dos cuartillas y media cada montón. ¿cuántos montones haremos»; «con 2 cuartillas cuantos montontones de a 0,25 cada* *uno se hacer»; «dibujar una línea de 14 cm. y dividirla en segmentos de 4,5 cm. cada uno».*

Problemas como éstos son fáciles, quizás demasiado para algunos alumnos, quienes hallan la solución sin necesidad de manipular. Pero lo importante es procurarnos una herramienta de trabajo para problemas con números mayores que los del ejemplo, números ante los que el cálculo mental se encuentra indefenso. Esa herramienta es el algoritmo y su técnica resolutoria.

Al igual que en el modelo B, se ve clara la necesidad de subdividir y convertir todo en unidades menores para operar, es decir, si subdividimos el divisor hemos de hacer lo mismo con el dividendo.

4.— MODELO D: decimales en el dividendo y decimales en el divisor. Partimos igualmente de problemas sencillos de agrupamientos y particiones para a continuación abandonar el material definitivamente y resolver únicamente utilizando los números.

Por ejemplo:

— «Coger 2,4 cuartillas y hacer montones de a ocho décimas cada uno».

— «Coger una cuartilla y media y dividirla en partes de a 0,25 de cuartilla cada parte».

La operatoria (nos hemos referido solo a la división pues las otras tres operaciones no ofrecen problemas de aprendizaje) con decimales es un capítulo importante dentro del contexto de la matemática en el E.G.B. porque su dominio proporciona a los alumnos la posibilidad de resolver situaciones por un lado, y, por otro, les afianza en la asimilación personal de nuestro sistema numérico.

Podemos, a saber, distinguir dos enfoques en la didáctica de los algorítmos:

a) Uno, experimental, de descubrimiento, que es el que en nuestra experiencia hemos intentado llevar a efecto y cuyos resultados son concluyentemente positivos. Se fundamenta en la investigación personal o colectiva y a través de ella se va llegando, tras un proceso experimental a la elaboración de las normas para operar.

b) El otro enfoque es mucho más conocido por ser el habitual. El alumno le llegan directamente las «cuentas decimales» ya formuladas a través del libro de texto u otro material. El profesor les hace memorizar las reglas: «se añade un cero en el dividendo y se pone un cero y una coma en el divisor», «se ponen tantos ceros como...», etc. Se considera comunmente que de este modo los alumnos alacanzan ante el objetivo y adquieren mayor rapidez operatoria. Además de que esto último es erroneo, hay que hacer las siguientes observaciones:

— Ese tipo de aprendizaje se convierte en simple adiestramiento al evitar el proceso personal de búsqueda y creación.

— No proporciona a los alumnos un mayor conocimiento de la mecánica del sistema numérico de base diez, el nuestro, pues se les evita la comprensión de lo que hacen.

— Por último, cuando, pasado un tiempo, las reglas se olvidan, los alumnos se quedan inutilizados para resolver una operación, con la consiguiente carga de angustia, inseguridad y rechazo que eso lleva consigo.

V

Método de trabajo

Quisiéramos concluir este tomo enlazando con la temática del capítulo primero sobre construcción de una didáctica. En esa construcción la figura del maestro es central. Como puede desprenderse de la lectura de los capítulos anteriores la didáctica que a lo largo de ellos queda dibujada constituye una alternativa diferenciada a la práctica escolar habitual y dentro de ella el papel del maestro es muy otro.

Es común actualmente encontrarnos con dos modelos de actuación del maestro ante la preparación de su trabajo. Uno caracterizado fundamentalmente por la programación estricta de las clases; contenidos, actividades, objetivos, (generales, parciales, operativos, etc,) y evaluación, dentro del marco de lo que se ha convenido en llamar pedagogía sistemática. Ese esfuerzo de programación puede ser ahorrado, como normalmente se hace, recurriendo al libro de texto en el cual el maestro encuentra «todo» lo que debe hacer. El otro modelo podríamos denominarlo con el término de «espontaneista» y se caracteriza por la imporvisación, la elasticidad y la sujección del maestro a la evolución de la dinámica del aula.

No entraremos en la discusión de dichos modelos. Si señalaremos que ninguno de ellos se adecúa a nuestra didáctica. Pensemos, por el contrario, que el maestro debe tomar la misma actitud investigadora que pretende inculcar a los alumnos, y que hemos comentado en el capítulo IIIb). En este sentido hablaremos de diseño abierto con previsión de metas a alcanzar (algún concepto, operación, técnica, etc.;), experiencias y ejercicios. Tratemos esto último con mayor amplitud.

Hay una gran corriente de enseñanza de las matemáticas alrededor de la cual se aglutinan la inmensa mayoría de las editoriales de libros de texto escolares (con loables excepciones) cuyas notas comunes principales son:

— Utilización del esquema siguiente: explicación teórica del tema o lección -ejercicios y problemas- evaluación.
— Considerar que los conceptos y operaciones matemáticos son adquiridos por los alumnos siguiendo la idea tradicional de transmisión por parte del profesor mediante la palabra (o el texto escrito) aunque, a veces, también recurra a materiales cuyo uso tiene una misión demostrativa o ilustrativa de las palabras del profesor.
— La disciplina se fracciona en lecciones o temas que, programadamente, deben ser «aprendidos» por los alumnos. «Dada la lección» y su evaluación correspondiente, se pasa a la lección siguiente.
— Subyace, la mayoría de las veces, el esquema conductista de estímulo-respuesta, si bien en diferentes versiones.
— El alumno debe tomar una actitud receptiva ante la explicación del maestro o del libro de texto y/o ejercitarse en la resolución de ejercicios según el modelo explicado por aquel.

Frente a esa gran corriente de enseñanza podemos colocar otra cuyo principal rasgo es la creencia de que la matemática puede y debe ser construída por los alumnos. Supone esta tendencia un cambio frontal respecto a la anterior. Podemos aglutinar en este bloque de alguna manera a Cuissenaire y Gategno y, sobre todo, a Dienes. Hablaremos de éste último pues su aportación es la más influyente entre nosotros.

Dienes recurre a Bartletr, Bruner y Piaget para elaborar su teoría, es decir, se coloca en una posición opuesta a la psicología del estímulo-respuesta. Se basa en la tesis de que los niños aprenden las matemáticas más fácilmente construyendo los conceptos a partir de su propia experiencia real. La reflexión sobre los conceptos o relaciones construidas es posterior a la construcción misma. Propone una teoría metodológica soportada por cuatro principios -dinámico, de constructividad, de variabilidad matemática y de variabilidad perceptiva o principio de concretización múltiple y un desarrollo del aprendizaje sesgado en seis etapas.

Frente a la corriente antes caracterizada Dienes nos advierte de la necesidad de organizar de modo totalmente distinto la clase y el procedimiento de comunicación con el alumno. Su didáctica queda centrada en:

— Proporcionar una gran variedad de experiencias matemáticas a los niños para que **por sí mismos e individualmente** (el subrayado es nuestro) puedan construir los conceptos matemáticos.

— Material manipulable apropiado, preferentemente estructurado.

— Tarjetas o fichas de instrucción para que los alumnos trabajen a partir de ellas. «Tales fichas estarían dispuestas «en serie».

— Construcción de un concepto por una serie de cuestiones progresivas —y en paralelo— presentación de la misma idea conceptual con diferentes materiales».

— El camino hacia la abstracción lo concreta en las etapas siguientes:

(I) Manipulación concreta de objetos para llegar a la (II) representación planificada de tales manipulaciones, y (III) formalización de dichas representaciones mediante estructuras formales o «sistemas de axiomas» ...

— Opta por la motivación intrinseca, por situaciones de descubrimiento y creatividad («El motor del aprendizaje matemático debería ser la alegría del descubrimiento y no el dudoso ideal de obtener mejores notas que el vecino o el oropel de un premio» y dibuja un rol de maestro no autoritario, antidogmático, consejero y colaborador de los alumnos. (I).

(1) Los fragmentos entrecomillados pertenecen a «La construcción de las matemáticas» del autor en la editorial Teide. Esta misma editorial ha publicado una colección de trabajos del mismo autor y otros afines cuya lectura recomendamos.

Existe una tercera corriente que se enclava dentro del Movimiento de Escuela Moderna, movimiento pedagógico que surgió en Francia en torno a Freinet y que está muy extendido si bien adopta en cada pais una denominación peculiar. En España tomó el nombre de Movimiento Cooperativo de Escuela Popular -M.C.E.P.- El presente trabajo pretende situarse en esta última perspectiva. Hacemos una llamada al lector para que saque sus propias conclusiones acerca de los parecidos y diferencias con respecto a las otras tendencias.

En cualquier caso lo que en este capítulo nos ocupa es la figura del maestro y su método de trabajo personal. La organización de la clase, los materiales a usar y la metodología a seguir pueden inferirse de los capítulos anteriores. Ahora bien, ¿como preveer y secuenciar un trabajo? ¿cómo diseñar la enseñanza-aprendizaje de un concepto?, ¿cómo establecer un plan de trabajo?, ¿cómo explotar una situación o motivar una experiencia?, ¿cómo llevar un seguimiento de los avances o estancamientos, de las diferencias interindividuales de los alumnos, del aprovechamiento de tal o cual material?, ¿cómo extraer de o conexionar con las otras materias el aprendizaje matemático?, ... Muchos son los interrogantes que el maestro se plantea en el curso de su quehacer cotidiano y que nadie puede responderle si no es con sugerencias, consejos o indicaciones. Sería interesante releer el final del capítulo «CONSTRUIR UNA DIDACTICA DE LA DINAMICA» y enlazar con las propuestas allí contenidas.

Tomemos como puntos de referencia dos: la planificación del trabajo y el seguimiento del mismo. Dentro del punto de planificación tengamos en cuenta:

a) La selección y determinación de unos contenidos. Curiosamente la graciosa amabilidad de nuestra Administración educativa nos ha hecho donación e imposición de unos programas, que ha tenido a bien considerar válidos, ahorrando así el esfuerzo y la responsabilidad a los profesores y centros. Ahora bien, la selección y establecimiento de contenidos y objetivos para un grupo de alumnos ha de tener presente:

— Los intereses y propuestas de los alumnos.

— Aquellos contenidos que son significativos o relevantes en un contexto cultural.
— Por último los niveles de desarrollo cognitivo de los propios alumnos.

El que haya unos programas generales con sus respectivos niveles, contenidos e indicaciones metodológicas no debiera ser obstáculo para que cada maestro o cada equipo docente tuviera la posibilidad de establecerlos en función de los tres factores antes citados (y no de adecuar los programas de la Administración a su aula o colegio).

b) Lo indicado en el apartado a) no es ajeno a la organización de la clase y a la metodología a emplear. Dicho en el lenguaje actualmente de moda: el diseño curricular (contenidos) difícilmente es separable del diseño instruccional (enseñanza) pues ambos se interpenetran y determinan.

Lo cierto es que al maestro le conviene tener un plan general de trabajo, con la salvedad de que sea modificable o incluso sustituible si el desarrollo de la dinámica es el aula así lo aconseja. Ahora bien, en el programa general se sitúan módulos menores constituyentes del programa mismo: conceptos concretos, una operación, una técnica calculatoria, etc., que conviene diseñar también; en otras palabras, antes de iniciar el trabajo con los alumnos sobre algo concreto es conveniente tener un plan de actuación o, cuando menos, conocer el hilo conductor progresivo en el aprendizaje de ese algo concreto de que se trate. Creemos que la exposición diacrónica que hemos hecho en los capítulos dedicados a las operaciones es sugerente con respecto a la posible elaboración de ese hilo conductor, escalonamiento o progresión de conceptos, relaciones, técnicas y operaciones físicas y psicológicas que conforman la construcción de una operación aritmética.

¿Cómo se establecen (y quién lo hace) esos módulos menores?; ¿Cómo se diseña su enseñanza?. Vayamos con la primera interrogante. Es frecuente que sean los propios alumnos, sobre todo en los cursos superiores, quienes proponen trabajar sobre tal o cual cuestión. Naturalmente que esto sucede en aulas de dinámica abierta donde los chicos tienen esa posibilidad y en donde se cultiva un cierto espíritu de investigación. En otras ocasiones el asunto a tratar viene como consecuençia necesaria de las investigaciones que los niños están llevando en otras áreas, esto es, a resultas de un enfoque de enseñanza globalizador. Otras veces, en fin, el maestro suscita, mediante juegos. La introducción de material o aprovechando situaciones espontáneas que surgen en clase, ciertos campos de trabajo. (Ver capítulo III) Así pues, los contenidos van quedando fijados por la interrelación dialéctica de almunos, maestro y la propia vida en el aula. El Maestro, entonces, debe tener la suficiente habilidad y los suficientes conocimientos curriculares como para saber qué propuestas o situaciones fomentar cuales otras no apoyar.

La respuesta a la segunda pregunta es más polémica, si cabe. ¿Es conveniente programar?. ¿Los alumnos deben seguir un diseño previo por muy elástico que éste sea? ¿Cómo encajar programación previa y dinámica abierta? (1). No repetiremos lo que dijimos al respecto en el capítulo tercero, pero lo cierto es que el maestro necesita una guía, un plan por pequeño que éste sea, unos pasos a seguir aunque el asunto a trabajar haya sido propuesto por los alumnos o surgido improvisadamente.

Nos atrevemos a proponer una técnica de diseñar que tome en cuenta cuatro factores:

a) Primero desmenuzar conceptualmente el objeto de estudio de que se trate estableciendo, si es posible, la jerarquía conceptual de la estructura que posea. Igualmente los conceptos previos en los que se base así como las operaciones lógicas y psicológicas sobre las que se sustente con el fin de obtener una visión curricular global. En el capítulo IVb) puede verse un análisis, aunque somero, de la RESTA.

---

(1) Los vocablos «programa», «diseño» y «plan» los usamos en sentido sinónimo. «Programa» y «programar» tienen otro sentido en el ámbito de la enseñanza programada y, por extensión, en el de la pedagogía sistemática o de objetivos, como el lector recordará.

b) Conocer hasta donde nos sea posible el nivel de desarrollo cognitivo de los chicos.

c) Previsión de experiencias y materiales.
Con los factores a) y b) podemos establecer un cuadro ordenando secuencialmente emparejando puntos de a) con puntos de b).

d) «El diario». El seguimiento del diseño confeccionado puede hacerse con la técnica del diario: carpeta de trabajo del maestro donde éste va anotando las observaciones al respecto — conversaciones, frases, observaciones de los alumnos, observaciones propias, problemas no previstos, reflexiones, etc, etc,.
La técnica *del diario es un útil abierto, creativo y fundamentalmente* un instrumento al servicio de la propia investigación del maestro.

Manuel Alcalá
Málaga, verano del 85

Investigar en Didáctica de las Matemáticas

I
¿SE PUEDE INVESTIGAR EN MATEMATICAS?

Degraciadamente cuando se habla de investigación en la escuela centramos la atención en lo que denominamos la investigación del medio. Parece como si el comportamiento investigativo de los niños se centrase en las áreas de Ciencias Naturales y Ciencias Sociales. Y, por supuesto, el maestro investigaría y favorecería la investigación de los niños en lo concerniente a esas áreas adoptando, en cambio, una actitud diametralmente opuesta en lo tocante a matemáticas (el esquema: explicación del maestro --- ejercicios). Esto último es un hecho generalizado.

Ahora bien, me propongo demostrar en este trabajo que no solo se puede investigar en matemáticas sino que, además, es una necesidad si pretendemos que el aprendizaje matemático sea significativo. Para ello comenzaremos por precisar los términos «investigar», «actitud de investigación» y «método».

Para muchos «investigar» es una actividad continuada y sistemática, un proceso conducido mediante unos pasos determinados (los eslabones del denominado método científico: toma de contacto con el objeto de la investigación, recogida de datos y análisis de los mismos, elaboración de hipótesis, etc.) cuya finalidad es la demostración o el descubrimiento de algo. Es ésta una versión de «investigar» propia de los adultos, consecuencia del pensamiento de tipo hipotético-deductivo.

Pero la mayoría de nosotros trabajamos con alumnos de corta edad, alejados de lo hipotético-deductivo y de lo sistemático. Sin embargo son individuos que también investigan. Entonces, para delimitar el término «investigar» dejaremos a un lado a los teóricos de la ciencia y a los defensores del método científico y retornaremos a la posición freinetiana del tanteo experimental y a nuestra propia práctica.

Investigar, en este sentido, es indagar, buscar un resultado y comprobar su validez. Es intentar satisfacer una curiosidad, comprobar una conjetura, bucear en lo desconocido, actuar para conocer algo no evidente inmediatamente, intentar solucionar un porqué.

Ciertamente, «actitud de investigación» será la predisposición al descubrimiento, a la búsqueda de algo nuevo, de algo que nos inquieta. Esa actitud, que es connatural a la generalidad de los individuos y necesaria para su desarrollo, puede ser favorecida y motivada en la escuela, no sólo en las áreas de Ciencias Sociales y Naturales, sino también en la de Matemáticas.

En nuestro ámbito, con las aportaciones traducidas de franceses e italianos junto a las propiamente nuestras, sabemos que investigar no es una práctica de adultos avalada por el sello del método científico, sino de todo individuo que se interroga acerca de lo que le rodea; que la investigación infantil no es disciplinar (en el sentido de constreñirse necesariamente a los contenidos de tal o cual asignatura) sino abierta y predisciplinar; que unas veces es puntual y otras continuada.

Las cuestiones precedentes nos conducen, inevitablemente, a hablar de método. O, con otras palabras, nos llevan a cuestionarnos sobre qué pasos siguen los niños cuando lo que investigan es de orden matemático; sobre cómo provocar, preparar y organizar una experiencia que resulte investigativa; sobre qué características son peculiares de la investigación matemática; sobre, en fin, que pasos ha de seguir el maestro.

Intentaré dar respuesta a esos interrogantes del modo siguiente: primero, clarificando las peculiaridades de la investigación matemática en la escuela frente a las de la investigación del medio; después tratando un método de trabajo del maestro.

II
CARACTERISTICAS DE LA INVESTIGACION DEL MEDIO Y DE LAS MATEMATICAS EN LA ESCUELA

El interés en distinguir un tipo de investigación de otro es puramente teórico. No hay tantas diferencias pero sí interesa tomarlas en cuenta para mejor profundizar en nuestras reflexiones sobre el tema. Sacar a la luz las diferencias nos ayudará a determinar una metodología de trabajo válida para el maestro que desee investigar él mismo y unas consecuencias importantes de índole didáctica.

A) La investigación del medio, término genérico con el que nos referimos a toda investigación de lo circundante, es fundamentalmente **diversa** y **globalizadora.** Diversa en el sentido de disciplinar, de que pretende dar respuesta a las motivaciones e intereses cognoscitivos de los niños (en nuestro ámbito se investiga aquello que los niños proponen o lo que proponen y negocia con ellos el maestro). Globalizadora por cuanto una investigación no puntualista da ocasión para tratar conocimientos pertenecientes a diversas disciplinas.

Por contra, el trabajo investigativo en matemáticas **no es diverso,** por ser la temática muy específica, ni **casi nunca, globalizador.** Esto quizá sea polémico y necesite alguna aclaración.

Hay numerosas experiencias publicadas en las que parece ser que se globaliza a partir de las matemáticas, pero eso es muy discutible. Cuando una clase lleva adelante una experiencia de cultivo de plantas, por ejemplo, y se sigue el crecimiento de las mismas mediante mediciones y computaciones, se está investigando las plantas pero no cuestiones estrictamente matemáticas, como en este caso serían las unidades de medida o los números.

Cuando un grupo de alumnos desarrolla una investigación sobre la población de un pueblo (n.° de habitantes, sexo, edad, ocupación, etc.), clasifica, cuantifica y posiblemente haga uso de nociones estadísticas, pero realmente investiga el medio; los aspectos matemáticos son auxiliares en su trabajo, no el objeto de su investigación.

Cuando un aula tiene cooperativa o monta una «tienda» dispone, efectivamente, de unos poderosos auxiliares para aprender aritmética, pero ello no significa necesariamente que ese aula esté llevando a cabo una investigación matemática.

B) La investigación del medio se realiza sobre lo concreto, lo que nos rodea o sobre nuestros propios cuerpos; sobre lo presente o pasado, pero concreto; casi siempre sobre **lo observable.**

Por su parte la investigación matemática se efectúa sobre entes y estructuras (números, operaciones, etc.), sobre propiedades que tienen o atribuimos a los sujetos, sobre constructos. Es decir, la investigación matemática no se realiza sobre lo observable, aunque en la investigación utilicemos material concreto y verifiquemos experimentalmente el resultado de nuestros hallazgos. Buscar varias formas distintas de fragmentar una cuartilla de papel en doceavos o intentar descubrir cómo hallar la longitud de una circunferencia son dos investigaciones marcadamente matemáticas y distintas a cualquier investigación de lo real por poner en juego conceptos y modos de operar peculiares.

El objeto de la investigación del medio es material, lo material; el objeto de la investigación matemática es inmaterial, se efectúa sobre relaciones, propiedades, etc.

C) La investigación del medio en la escuela posee una coherencia definida por el método científico (entendiendo éste en sentido no rígido). La investigación matemática en la escuela es coherente en sí misma, no se rige por los métodos de trabajo de las ciencias naturales o sociales y, en el fondo, remite sólo a conceptos y operaciones lógicomatemáticas, eso sí, susceptibles de comprobación.

Bien es verdad que la cientificidad de la investigación no debe preocuparnos demasiado. JOSE LANUZA afirmaba hace tres años:

«No investigamos las cosas desde un punto de vista científico, sino desde el punto de vista que realmente interesa al niño. Ahora bien, procuramos hacerlo de una forma metódica, crítica, enriquecedora, científica.» (COLABORACION, n.° 46).

La perspectiva diacrónica o evolutiva es importante a la hora de profundizar algo sobre el tema: no es lo mismo el proceso de investigación llevado a cabo por niños de 6-7 años (a los que se refiere Lanuza) que el que desarrollan individuos de 10-12 años.

Por su parte, PACO OLVERA, cuya experiencia se ha dado principalmente con niños de esas últimas edades, al interrogarse sobre que condiciones debe reunir un trabajo de investigación en la escuela, responde:

«Fundamentalmente los eslabones del método científico: toma de contacto con el motivo de la investigación,...» (1)

De modo parecido, en matemáticas el proceso investigador de niños de edades más avanzadas se monta sobre el sustrato de conceptos y operaciones que ya poseen y que es superior y cualitativamente distinto al de niños de menor edad.

(1) **Olvera Paco: INVESTIGACION DEL MEDIO EN LA ESCUELA Córdoba, 1982 pág. 29 - Ed. Paco Natura.**

En esencia el proceso investigador matemático se reduce, a nivel subjetivo, a anticipaciones, comprobaciones y retroacciones (algo similar a lo que en la investigación del medio se entiende por hipótesis y comprobación de las mismas) con dos características:

a) Que se manifiestan externamente como tanteos.

b) Que su hilo conductor intrínseco es de naturaleza lógica, en última instancia.

c) Coincidencias.

— La investigación, tanto en matemáticas como en cualquier otro campo, es fundamentalmente experiencial.

— La investigación, entendida como proceso de búsqueda, necesita sistematización y técnica.

— La función del maestro en ambos casos es idéntica, por lo que quizá desde el punto de vista del maestro sea irrelevante distinguir entre una y otra. Motivar, preparar materiales y organizar el trabajo, apoyar, sugerir, conducir el desarrollo de la experiencia..., son conductas propias del maestro. La conducta investigativa de los niños es básicamente igual en todas ocasiones. Podría reducirse al siguiente esquema:

Conocimiento de la situación, de los materiales o de ciertos conceptos

↓

interrogantes

↓

Búsqueda de estrategias y anticipación de respuestas

↓

Comprobaciones

La Psicología y nuestra experiencia nos aportan mucho al respecto, lo cual nos interesa tenerlo presente para buscar nosotros mismos estrategias adecuadas de intervención.

III
CONVENCIONES PREVIAS

¿Cómo podemos conseguir que nuestra clase investigue también en matemáticas? ¿Cómo podemos preparar y desarrollar un contenido (un concepto, una técnica algorítmica, una operación, un tema) desde una óptica investigativa, es decir, para que los alumnos lo conquisten a través de su propia investigación? ¿Cómo podemos aprender nosotros de nuestra propia práctica?

Sería interesante dar respuesta a esos interrogantes y a ello van dedicadas las páginas siguientes. Dividiremos, pues, el contenido de lo que sigue en tres partes: comenzaremos estableciendo unas convenciones o hechos previos, después un método de trabajo del maestro para terminar haciendo unas consideraciones didácticas.

Las convenciones previas o puntos de partida que quisiera resaltar son las siguientes:

1.— No todo el aprendizaje escolar se produce como consecuencia de investigaciones realizadas por los alumnos, ya individual ya grupalmente, sino sólo una parte del mismo (me refiero a matemáticas y a aulas donde se práctica investigación).

La imitación y la recepción de información son formas de aprender que no debemos despreciar. La memorización y el ejercicio sistemático son necesarios y ocupan mucho tiempo.

Sin embargo una didáctica que tome como eje central el aprender por medio de investigaciones, ora puntuales, ora procesuales y sistematizadas, conlleva unos valores indiscutibles y por todos nosotros reconocidos.

2.— El aprendizaje matemático no es esporádico, ni puntual, ni espontáneo. Se produce a través de un proceso de descubrimiento personal que ha de ser sistemáticamente -aunque con flexibilidad - dirigido.

3.— Es conveniente en nuestro trabajo partir de una hipótesis fructífera. Tal es:

«Los conocimientos matemáticos en la escuela no son transmisibles por vía oral o escrita, antes bien se producen como consecuencia de complejos procesos de construcción individual».

Si partimos de dicha hipótesis (hipótesis que no es desatinada) nos veremos conducidos a:

— Motivar actitudes de investigación en lugar de actitudes de recepción pasiva.

— Preparar experiencias e investigaciones en lugar de explicaciones y lecciones.

— Sustituir el «cómo explicaría yo este concepto» por el «cómo haría yo para que construyeran este concepto».

— Sugerir, indicar, orientar en lugar de definir ex cathedra.

— Favorecer el trabajo exploratorio individual o en grupo y el debate en oposición al libro de texto y el silencio.

4.— Es necesario (y posible) que cada maestro con sus alumnos vaya creando su propia didáctica. Para ello precisa de unos principios psicopedagógicos de los que partir y conocer unos pasos metodológicos que le sirvan de referencia. Estoy convencido de la validez de los pasos metodológicos y de los principios que se recogen en los primeros capítulos de este libro, aunque estén pobremente desarrollados.

5.— El trabajo escolar en matemáticas necesita un tiempo específico y unos materiales y experiencias peculiares.

6.— En una clase que investiga, el maestro mismo es también un investigador. Nuestros conocimientos sobre la psicología infantil (construcción de conceptos y operaciones, los problemas de comunicación, de las relaciones interpersonales, etc.), son tan incompletos como sobre técnicas, materiales y métodos. Tan es así que nunca estamos plenamente seguros de la validez de un material, de cómo impulsar a este o a aquel niño, de cual es la experiencia más adecuada, etc. etc...

Son tantos y tantos los interrogantes que nuestro trabajo nos plantea a diario, para los cuales no tenemos una respuesta certera, que nos conviene adoptar nosotros mismos el papel de aprendiz, pues, en realidad, eso somos. Al procurar que los niños adquieran determinados conocimientos nosotros, con la actitud propia del que aprende, estamos, estaremos adquiriendo otros de índole profesional: técnicos, psicológicos, humanos.

Nuestro trabajo siempre está sujeto a revisión y nuestra conducta en clase (que puede ser tan inadecuada como la de muchos de nuestros alumnos) es perfeccionable.

IV
METODO DE TRABAJO DEL MAESTRO

Difícilmente podremos llevar a cabo un trabajo de investigación si no disponemos de un método o, al menos, de unas pautas que nos ayuden a su realización. El método que voy a exponer lo he articulado alrededor de cuatro puntos:

— elección del objeto de investigación
— programación de la investigación
— diseño o preparación de cada sesión o experiencia
— el diario como técnica de seguimiento.

1.— ELECCION DE OBJETO

Conviene tener por norma extraer el objeto de la investigación a desarrollar de las propuestas de los alumnos. Con frecuencia las propuestas suelen ser disparatadas, mal expresadas o imposibles de llevar a efecto pero no cabe duda que tales propuestas responden a intereses de los niños. Por eso hay que tomarlas en cuenta, aunque tengamos nosotros que reorientarlas.

En ocasiones y a falta de propuestas por parte de los alumnos el maestro se ve forzado a suscitar o a proponer otras. Las propuestas del maestro unas veces viene como consecuencia de un trabajo de investigación del medio, otras por introducción de un material nuevo que él aporta a clase, otras aprovechando sucesos de la vida del aula, etc.

Lo difícil no es dónde encontrar un motivo para proponer un trabajo a los niños sino saber qué trabajo exactamente y cómo proponerlo de modo que suscite interés.

2.— PROGRAMACION

Distinguiremos entre investigaciones puntuales u ocasionales e investigaciones de larga duración. Ejemplos del primer tipo pueden ser: cómo clasificar las hojas recogidas en una salida, buscar formas de descomponer y recomponer el número ocho, inventar una forma diferente de hacer las cuentas de multiplicar, cómo calcular el área de un cuadrado.

Ejemplos de investigaciones de larga duración son: «descubrir cómo crecen los números», «investigar cómo hacer restas con números grandes», «investigar por qué el metro se divide en trocitos»,...

Aquí me referiré a las de larga duración, pues las puntuales son esporádicas y, normalmente, encajan dentro de aquellas.

Una vez determinado el objeto de la investigación compete al maestro programar el previsible desarrollo del mismo.

Sea, por ejemplo, el tema de las fracciones. Lo fraccionario se nos puede aparecer bajo muy diferentes formulaciones, propias de cada nivel, pues es una temática que se trata a lo largo de varios cursos. Puede surgir en propuestas como «aprender lo que son los cuartos de litro», «investigar el reloj, las horas», «aprender quebrados», o bien a propósito de algún libro de texto, de otras investigaciones o a propuesta del maestro.

Para realizar su programación necesitaremos:

a) **Conocer el desarrollo conceptual y operatorio** del tema en cuestión, aunque sea aproximadamente. Es decir, en sentido evolutivo, cuáles son los conceptos básicos y primeros y cuáles los posteriores (que se fundamentan en los primeros); cuáles las posibles operaciones iniciales y las que ofrecen mayor dificultad; la posible relación secuenciada con otros conceptos y operaciones pertenecientes a otros temas matemáticos: división, números con coma, etc.

Dicho de otra forma, al maestro le interesa poseer una visión diacrónica y global del tema que va a trabajar con sus alumnos lo más amplia posible. De ese modo, si su experiencia la va a realizar con alumnos de 5.° curso, por ejemplo, podrá saber qué conocimientos normales tendrán adquiridos sus alumnos, qué conocimientos podrán ser conseguidos aproximadamente con su investigación y, sobretodo, a dónde conduce (conceptos posteriores) su trabajo.

Los libros de texto son un buen material para obtener la idea global de la que hablamos si consultamos de diferentes niveles y editoriales. Igualmente lo son los programas oficiales y las publicaciones que versen sobre el tema: libros, artículos de revistas, etc.

b) **Conocer los conocimientos previos de los alumnos,** cuestión ésta que ha sido siempre norma en los buenos maestros. No es imprescindible realizar exámenes o tests previos. Incluso podemos iniciar la experiencia sin haber hecho antes un sondeo, pero, inevitablemente, en las primeras sesiones debemos preocuparnos de ello si queremos que la investigación sea exitosa.

c) **Buscar** en la bibliografía de la que nos hallamos provisto **experiencias** de dos tipos:

C^1.- Experiencias destinadas a tratar aspectos concernientes exclusivamente al objeto de investigación. En nuestro ejemplo, aspectos fraccionarios: experiencias con material concebido para ello, juegos específicos, etc.

C^2.- Experiencias amplias, que abarquen aspectos no estrictamente fraccionarios: agua y medidas para experimentar, particiones de polígonos, etc.

d) **Enfoque e hipótesis**

Si ya tenemos cierta idea global del tema, del nivel de nuestros alumnos, de posibles experiencias y de materiales a usar podremos entrar en lo más atractivo de la investigación: establecer unas hipótesis iniciales y concebir un enfoque del trabajo a desarrollar.

Puede suceder (cosa que no creo) que estemos convencidos de la validez de la didáctica generalmente aplicada, en nuestro caso referente a fracciones. Mas lo probable es que no nos satisfaga, en cuyo caso nos permitiremos la aventura de intentar otra forma de hacer las cosas.

Para ello podemos partir de unas hipótesis, -que podrán ser tomadas de otros, o resultado de alguna lectura apasionante o, de creación propia -, y ceñirnos a la experimentación y comprobación de su contenido. Por ejemplo, establezcamos las siguientes:

— El aprendizaje de las fracciones puede hacerse a través de manipulaciones de material y juegos.

— En el aprendizaje de las fracciones lo importante, posiblemente, es la aplicación de esquemas operatorios multiplicativos, lo perceptivo sería secundario.

De acuerdo con nuestras hipótesis concebiremos un enfoque metodológico y seleccionaremos (o inventaremos) material a usar, juegos que podemos hacer, etc.

Ahora bien, si no tenemos unas hipótesis de las que partir pero, a pesar de todo, queremos investigar, pongámonos a ello.

Las hipótesis, las ideas sugerentes, irán apareciendo a medida que avancemos en nuestro trabajo, conversemos y juguemos con los alumnos, nos percatemos de nuestros aciertos y de nuestros errores. Todo tiene un por qué. Lo atractivo es indagar su respuesta y comprobarla.

e) Elaboración de un cuadro que, en principio, no es más que un borrador, una guía de trabajo. En él ordenamos, concatenamos y relacionamos lo que pretendemos hacer.

El desarrollo del trabajo casi nunca se ajustará a lo programado en principio. A pesar de conocer este extremo es conveniente elaborarlo para no perdernos en improvisaciones inconexas. La experiencia directa nos irá indicando en qué estábamos equivocados, qué no habíamos previsto y qué deberemos eliminar, reorientar o introducir.

La siguiente tabla es una muestra sencilla a nivel de iniciación a las fracciones.

Orden	Experiencia-Materiales	Objetivos
1	Partir cuartillas de papel bajo consigna. Poner nombre (Simbología) Familia de medios-cuartos.	Convenir la nomenclatura. Descubrir equivalencias.
2	Partir cuartillas con consignas similares. Representación de lo hecho mediante árboles gráficos.	Descubrir distintas formas de fraccionar. Dominio de los árboles.
3	Juego de cartas con los fragmentos de papel	Calcular equivalencias
4	....	....

El por qué de introducir las fracciones por medio de fragmentaciones de material continuo (cuartilla de papel), en nuestro ejemplo; el por qué de la utilización de árboles gráficos; las normas del juego de cartas, etc., irá siendo escrito y fundamentado en el cuaderno propio de trabajo o diario del que más adelanted hablaremos.

3.— DISEÑO O PREPARACION DE CADA SESION

Entramos con este punto en el núcleo de la problemática investigadora del maestro. El diseño de una sesión ha de ser preciso y coherente con las hipótesis de fondo y el marco programático general, pero abierto. Su aplicación ha de ser flexible y susceptible de cambios según se vaya desarrollando en el aula.

El diseño de una sesión no es más que la previsión, cuidadosamente estudiada, de lo que haremos en clase. Con frecuencia las previsiones no se cumplen tal y como habíamos anticipado. Esta cirscunstancia no invalida el método de trabajo; por el contario, lo reafirma en el sentido de que para nosotros ello supone una reflexión permanente sobre nuestro trabajo y el de los alumnos, un tanteo experimental continuado.

Veamos un ejemplo de preparación de sesión.

Siguiendo con nuestro tema y de acuerdo con la programación marco prevista (casilla 1) preveemos los siguientes puntos ordenados cronológicamente:

--- trabajo colectivo bajo consigna del maestro
--- material: cuartillas de papel

1.- Puesto que vamos a dedicarle tiempo a esta investigación anirmarlos y explicarles cómo lo vamos a hacer.

2.- Repartir varias cuartillas a cada uno. Formar una y hacer medios. Convenir su nominación matemática.

3.- Preguntas directas e inversas:

• ¿De una cuartilla entera cuantos medios obtienes?
¿Y de dos? ...

• ¿Cuantos medios necesitas para formar un entero?

¿Y dos?...

4.- Partir una cuartilla en cuatro partes iguales. Nomenclatura matemática y preguntas de igual sentido.

5.- Llegar a octavos, si puede ser.

4.— EL CUADERNO DE TRABAJO O DIARIO

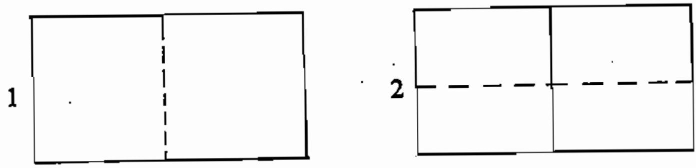
Este instrumento de investigación no tiene relación con las técnicas Freinet de «El libro de vida» o «El diario escolar», aunque encaje perfectamente con ellas. Consiste en un cuaderno, carpeta o carpetas de trabajo en donde iremos anotando el seguimiento de nuestra investigación.

¿Como hacerlo? Una forma sencilla es la que voy a tratar de sintetizar.

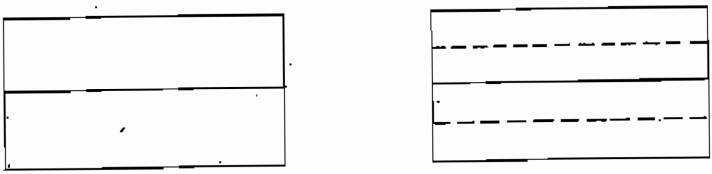
En nuestro cuaderno conviene tener la programación marco, que nos servirá de referencia. Además, es fundamental escribir las tesis de partida, las hipótesis a experimentar y el cariz metodológico que intentaremos dar a la investigación, pues, como seguridad, tendremos que volver sobre ellos y retocarlos contínuamente.

Anotaremos el diseño de la sesión o experiencia que hemos preparado. Una vez realizada volvemos a nuestro cuaderno y anotamos si se cumplieron o no las previsiones, las dificultades que hemos encontrado, los imprevistos surgidos, etc.

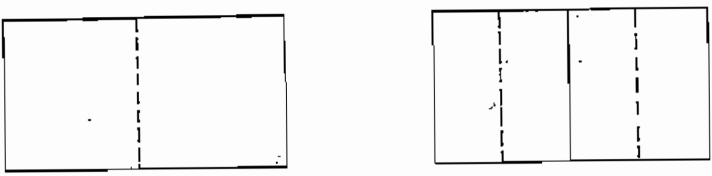
Por ejemplo, en el diseño antes expuesto a modo ilustrativo se pasó por alto un problema importante que normalmente surge en clase y que es de la mayor importancia: el problema de la igualación de las partes o conservación de la cantidad interpartes. En la experiencia de obtener cuartos (punto 4) sucede que no todos dividen la cuartilla de la misma forma. Unos nacen medios y, después, éstos los convierten en cuartos del modo siguiente:



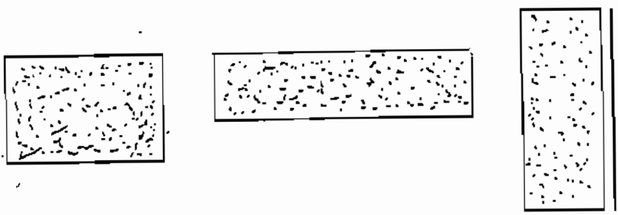
En cambio, otros niños efectúan su partición así:



Otros la hacen de la siguiente forma:



Nos encontramos inesperadamente con que hay diferentes tipos de cuartos de un mismo entero:



Para muchos niños su equivalencia no es evidente. Si preguntamos si todos son cuartos o si todos tienen la misma cantidad de papel nos sorprendemos de sus respuestas.

He aquí una situación experimental conflictiva surgida al hilo de la investigación general emprendida y que no habíamos previsto, pero que es una situación problemática cuya explotación debemos aprovechar. Las reflexiones que hagamos sobre ello, las soluciones que intentemos aplicar, etc., nos servirán de base para preparar la sesión siguiente.

Es bueno tomar nota de todo ello: la situación encontrada, las frases de algunos niños; nuestra explicación de las posibles causas de no ver esas equivalencias y por dónde encontraríamos su solución; a qué puede ser debido que otros alumnos no encuentren ese problema, etc.

Como se ve, esta técnica de trabajo es semejante a un diario. «Diario» porque es un seguimiento continuo y metódico de nuestra investigación, pero tiene poco que ver con el «DIARIO» en su versión literaria.

La técnica del diario es un medio para aprender de nuestra propia experiencia, un instrumento para construir teoría a partir de nuestra propia práctica.

Es cierto que hay otras formas de investigar y de hacer el seguimiento. En mi opinión, la técnica del diario es la más útil, entre otras razones porque incide directamente en el aprendizaje del maestro.

Posiblemente, cuando lleguemos al término de nuestra investigación no estaremos satisfechos con ella. Habremos cometido muchos fallos, habremos dejado algunas o llegado a un callejón sin salida. Pues bien, si todo ello consta en nuestro diario estaremos en condiciones de saber cómo deberíamos haber hecho las cosas. Lógicamente, cuando durante otro curso nos enfrentemos también a la misma o parecida investigación, ya disponemos de un cúmulo de reflexiones, experiencias e incluso materiales (si nos hemos tomado la molestia de conservar las fichas, juegos y demás cosas preparadas por nosotros mismos) que nos servirán de hilo conductor para que nuestro trabajo sea exitoso.

Por otra parte, esta técnica de trabajo personal se revela especialmente valiosa cuando se participa en seminarios o grupos de trabajo de cualquier tipo. Nos vale tanto para aportar de forma sistematizada nuestra experiencia como para acoger propuestas de los demás.

Y si nos vemos en la situación de tener que transcribirla tenemos dispuestos todos los elementos necesarios para ello.

V
CONSIDERACIONES DIDACTICAS

El método de trabajo expuesto está en íntima interdependencia con las convenciones previas y lo que entendemos por investigar. Ahora bien, al maestro, máxime si trabaja en Ciclo Inicial o Ciclo Medio, le es imposible llevar él mismo su propia investigación en todas las áreas, por el esfuerzo que esto supone. Sin embargo sí está a su alcance crear un clima apropiado para la investigación, es decir, organizar el aula y el trabajo y procurar unas relaciones humanas que favorezcan y estimulen la participación activa de los niños.

En lo tocante a matemáticas sí debemos resaltar lo siguiente:

a) El trabajo en matemáticas necesita mayor sistematización que en otras áreas. Por ello conviene ser más precisos en su preparación y tener clara una metodología a la hora de actuar en clase.

b) De la exposición del método de trabajo antes hecha se puede corregir que la forma en que actuemos en clase es determinante. Es fundamental establecer unas relaciones no autoritarias en clase como es imprescindible algo que podríamos llamar autoritarianismo, esto es, confianza, por parte de los niños en la conducción que el maestro vaya realizando, aceptación de sus sugerencias e indicaciones, receptividad a las propuestas del maestro.

c) La mejor forma de obtener información de las dificultades de los niños y de aproximarnos al conocimiento de sus mecanismos mentales es participando con ellos en pequeños grupos, en el juego o en la experiencia de cualquier tipo que estén haciendo. Intervenir y dialogar con interrogantes como «cómo lo has conseguido», «¿Qué has hecho con la cabeza para resolverlo?»... nos proporciona una información que necesitaremos para proveernos de una teoría que necesitaremos como guía en el trabajo.

El método estadístico, por el que tantos sienten debilidad, no nos vale de mucho.

Recientemente se han publicado trabajos que pretenden construir un modelo didáctico genérico extrapolando a otras áreas elementos de la investigación del medio en la escuela. Nobles y valiosos intentos, pero que muestran dos debilidades:

Una, conceder excesiva importancia a la investigación en la escuela siguiendo las pautas de la denominada investigación del medio. Esperemos que, pasada la moda actual, se reequilibren las posturas.

Otra, un cierto desconocimiento práctico de la pedagogía Freinet, o en sentido amplio, de la pedagogía de Escuela Moderna, pues mucho de lo que se publica actualmente en revistas especializadas no es muy diferente de lo que hace años ya era tradición en colectivos pedagógicos afines a esa corriente pedagógica. Con frecuencia las palabras y frases de moda encubren viejas realidades.

Indice

FE DE ERRATAS

— Pág. 11, línea 18 y sgs. Donde dice: «En las páginas ... partícipes del mismo». debe decir «En las páginas siguientes intentaremos desarrollar esta idea mostrándonos partidarios de un modelo de creación didáctico en el que los alumnos son partícipes del mismo».

— Pág. 25, línea 4 y sgs. Donde dice: «Más aún, ... interiorización de las acciones y...» debe decir «Más aún, es considerando al individuo como sujeto total de aprendizaje como retomamos el asunto de los apriorismos de nuestra sensibilidad: espacio y tiempo. No hay en nuestro conocimiento nada que no se apoye en el espacio y en el tiempo, en un movimiento continuo base de nuestro pensamiento.

Si no despreciamos el tema piagetiano de la interiorización de las acciones y de la coordinación de esas...».

— Pág. 32, línea 16. Donde dice «dirigirse» debe decir «dirigir».

— Pág. 48. En el rótulo SERIACIONES, ORIENTACIONES, RITMOS debe leerse SERIACIONES, ORDENACIONES Y RITMOS.

— Pág. 83, línea 11. donde dice «poderemos a experiencias» debe decir: «podremos pasar a realizar otras experiencias de».

— Pág. 84. En las cuatro últimas líneas debe leerse:

«- Descomposiciones numéricas:

23 = 20 + 3
23 = dos decenas (vasos) y tres unidades (sueltos)».

LA GLOBALIZACION es, desde el punto de vista del M.C.E.P., un método natural y vivo de aprendizaje de la realidad.

Las Matemáticas deben ser entre otras cosas, pero de una manera fundamental, un instrumento de análisis de la realidad.

Este libro pretende ser una aportación más a ese intento de unir aprendizaje y realidad, dentro de una escuela abierta y cooperativa, en la que niños, maestros y padres deben jugar un papel fundamental y que concibe la educación como desarrollo y elevación de todas y cada una de las facetas de la persona humana y, por lo tanto, también de la faceta matemática.